UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA EDUCACIÓN MEDIA UTILIZANDO EL MODELO DE VAN HIELE

CARLOS JULIAN PEÑA MEDINA cód. 141002312
JUAN CAMILO VARGAS GONZALEZ cód. 141002317

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
VILLAVICENCIO
2015

UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA EDUCACIÓN MEDIA UTILIZANDO EL MODELO DE VAN HIELE

CARLOS JULIAN PEÑA MEDINA

JUAN CAMILO VARGAS GONZALEZ

Directores

ARTURO ALEXANDER CASTRO

IVONNE AMPARO LONDOÑO

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

VILLAVICENCIO

2015

AUTORIZACIÓN

Yo **CARLOS JULIAN PEÑA MEDINA**, identificado con C.C. N◦ 1.121.892.968 de Villavicencio (Meta), y **JUAN CAMILO VARGAS GONZALEZ**, identificado con C.C. N° 1.122.649.429 de Restrepo (Meta), autores del trabajo de grado titulado **UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA EDUCACIÓN MEDIA UTILIZANDO EL MODELO DE VAN HIELE**, presentado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física, hacemos entrega del ejemplar y autorizamos a la Universidad de los Llanos, según los términos establecidos en la Ley 13de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y Decreto 460 de formas, los derechos patrimoniales de reproducción alquiler, préstamo, público e importaciones que me corresponde como creador de la obra objeto del presente documento. PARÁGRAFO: La presente autorización se hace extensiva, no sólo a las facultades y derechos de uso sobre la obra en formato o soporte material, sino también para formato virtual, electrónico, digital, óptico, usos en red, internet, extranet, etc.; y en general para cualquier formato conocido y por conocer.

El AUTOR-ESTUDIANTE, manifiesta que la obra objeto de la presente autorización, es original y la realizó sin violentar o usurpar derechos de autor de terceros, por lo tanto, la obra es de exclusiva autoría y detecta la titularidad sobre la misma. PARAGRAFO: en caso de presentarse cualquier reclamación o acción por parte de un tercero en cuanto a los derechos de autor sobre la obra en cuestión, El ESTUDIANTE-AUTOR, asumirá toda la responsabilidad y saldrá en defensa de los derechos aquí autorizados, para todos los efectos de la Universidad actúa como un tercero de buena fe. Para constancia, se firma el presente documento en dos (2) ejemplares del mismo valor y tenor en Villavicencio, Meta: a los diez (10) días del mes de abril de dos mil quince (2015).

____________________________	________________________________
CARLOS JULIAN PEÑA MEDINA	**JUAN CAMILO VARGAS GONZALEZ**
C.C. 1.121.892.968	C.C. 1.122.649.429
Villavicencio – Meta	Restrepo – Meta

AUTORIDADES ACADÉMICAS

OSCAR DOMÍNGUEZ GONZÁLEZ
Rector

WILTON ORACIO CALDERÓN CAMACHO
Vicerrector Académico

GIOVANNY QUINTERO REYES
Secretario General

MANUEL EDUARDO HOZMAN MORA
Decano de la Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación

CLAUDIO VINICIO VELEZ
Director de la Escuela de Pedagogía y Bellas Artes

FREDY LEONARDO DUBEIBE MARÍN
Director del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física

NOTA DE ACEPTACIÓN

____

____

____

____

DELIA RINCÓN ARIZA
Directora Centro de Investigación FCHyE

____

PhD. FREDY LEONARDO DUBEIBE
Director del Programa de Licenciatura en
Matemáticas y Física

____

Mg. ARTURO ALEXANDER CASTRO
Director

____

Mg. IVONNE AMPARO LONDOÑO
Director

____

Mg. BEATRIZ AVELINA VILLARRAGA
Evaluador

____

Mg. HENRY SANTIAGO
Evaluador

Villavicencio, 10 de abril de 2015

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer a nuestros directores de proyecto de grado, Mg. ARTURO ALEXANDER CASTRO y Mg. IVONNE AMPARO LONDOÑO por su esfuerzo y dedicación, quienes con sus conocimientos, experiencia, paciencia y motivación, han logrado que podamos terminar nuestros estudios con éxito. En general muchas gracias por todos aquellos momentos de apoyo y de generosidad con nosotros.

En el ámbito familiar, muchas gracias a nuestros padres Natividad Medina Rozo, Aida González Lozada y Luis Jair Vargas quienes con su apoyo incondicional, sus enseñanzas y en ocasiones algunos regaños, contribuyeron durante nuestra formación profesional, sin ellos el desarrollo de este trabajo hubiera sido imposible. También agradecemos a personas como Sindi Peña, Astrid Peña, Viviana Vargas y Andersen Vargas que hicieron parte de este proceso de más de cinco años de esfuerzo acompañándonos con sus palabras de ánimo y motivación.

Finalmente y conscientes de que son muchas las personas valerosas que han formado parte nuestro camino profesional, se hace difícil mencionarlos a todos, pero les dejamos un pequeño mensaje: gracias por su amistad, apoyo y compañía en todos y cada uno de los momentos de nuestras vidas.

TABLA DE CONTENIDO

Pag.

LISTA DE TABLAS

TABLA DE FIGURAS

TABLA DE ANEXOS

Pag

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente el sistema educativo está pasando por una serie de cambios, con el fin de utilizar nuevas metodologías de enseñanza a través de las TIC's. Mediante estas metodologías se busca que el estudiante deje de ser el receptor de un modelo tradicional sólo vigente, para que participe en el proceso educativo de forma activa, utilizando contenidos agradables y de fácil comprensión. El papel del docente es vital en el desarrollo de las metodologías y estrategias, para un mayor entendimiento de lo que se está enseñando con el uso de las TIC's. Es por esto, que es importante que el docente esté preparado para construir un nuevo paradigma educativo.

Enseñar contenidos de trigonometría a estudiantes de secundaria es una labor compleja. La mayoría de los jóvenes no han adquirido la madurez mental, para entender enunciados y teoremas de este tipo, y a esto se le suma la carencia de estrategias para lograrlo por parte del docente. Por esta razón la presente investigación promueve el desarrollo de estrategias utilizando el método de Van Hiele como base fundamental para la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría.

El Modelo de Van Hiele o Niveles de Van Hiele es una teoría de enseñanza y aprendizaje de la geometría, diseñado por el matrimonio holandés Van Hiele en la década de los cincuenta. El aprendizaje de la geometría se construye pasando por niveles de pensamiento, que cada estudiante puede alcanzar en el marco de sus capacidades y de la calidad de las estrategias utilizadas por el docente; en la actualidad este modelo es utilizado en el desarrollo de unidades didácticas y currículos en geometría secuenciando contenidos y organizando las actividades que se han de diseñar en las unidades didácticas.

La presente investigación se llevó a cabo en la Institución Educativa Colegio Francisco Arango ubicada en la Calle 33 A N^{0} 39 – 65, del barrio Barzal Alto, con educandos del grado décimo de educación secundaria integrados por (48) estudiantes.

Para el desarrollo de esta investigación, se diseñaran un conjunto de actividades que constituyen una unidad didáctica basada en el modelo de Van Hiele; aplicadas a los contenidos temáticos de trigonometría. Con el diseño de estas actividades se pretende que el proceso educativo sea eficaz y conciso, logrando que estudiantes y docentes se interesen en la enseñanza de la trigonometría, con el objetivo de alcanzar altos niveles en competencias (saber, hacer y ser) y en el desarrollo de los diferentes tipos de pensamiento geométrico y espacial.

Partiendo de una metodología y estrategia innovadora que permita al estudiante profundizar en conocimientos sobre trigonometría, mediante actividades se llevó al educando a que mejore sus habilidades, unas que ya poseía y otras que carecía, abriendo un marco de posibilidades de aplicación de este conocimiento en diversos contextos.

En la enseñanza de la trigonometría, las funciones trigonométricas son un tema de complejidad para los estudiantes de grado decimo. Por este motivo se abordaron utilizando el modelo de Van Hiele, logrando que los educandos se apropiaran de cada concepto, desde la representación gráfica hasta la representación simbólica (ecuación) que allí se presentó.

A partir de los contenidos matemáticos y geométricos, se analizaron las actitudes, aptitudes, ideas previas y concepciones geométricas, cuando se enfrentaron a metodologías y estrategias pedagógicas diferentes a la tradicional.

En el desarrollo de esta investigación fue muy importante la secuencia de los diversos contenidos: matemáticos y geométricos, puesto que se sabe que la enseñanza de las funciones trigonométricas requiere del uso mancomunado de estas dos áreas. El modelo de Van Hiele es aplicado en este contexto teniendo cuidado en que tanto, la matemática como la geometría vayan de la mano favoreciendo la adaptación de los estudiantes en cada nivel de aprendizaje y habilidad a desarrollar. Estos niveles son: visualización, análisis, ordenación o clasificación, deducción formal y rigor; ahora bien las habilidades a desarrollar por parte de los estudiantes son: visuales, verbales, dibujo, lógicas y aplicadas.

2. MARCO TEÓRICO

La intención de este capítulo, es establecer las bases teóricas que respaldan este trabajo, las cuales se basan en la definición, elaboración y planificación de una unidad didáctica; el modelo de Van Hiele como organizador de la enseñanza y fundamental en la elaboración de los descriptores; y los contenidos matemáticos de las funciones trigonométricas que constituyen el objeto de estudio de la presente investigación.

La sección 2.1 se dedica a la definición, planificación y elaboración de una unidad didáctica a partir de explicación desde bases teóricas.

En la sección 2.2 se muestra la importancia de enseñar la geometría y algunos aspectos sobre la enseñanza de la misma.

La sección 2.3 presenta la caracterización de la metodología de enseñanza y aprendizaje usada en el diseño de la unidad de enseñanza para el aprendizaje de las funciones trigonométricas y para el desarrollo de las habilidades de demostración. Esta caracterización la apoyamos en el análisis de algunas dificultades del aprendizaje de conceptos y relaciones de las razones trigonométricas, la enseñanza y el aprendizaje de conceptos, relaciones, propiedades y procesos matemáticos (representación y conexiones, razonamiento y demostración), el papel que juega el uso de los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) como apoyo en un contexto de enseñanza por descubrimiento guiado.

El apartado 2.4 presenta en forma sintética el modelo de Van Hiele y el desarrollo del pensamiento geométrico; explicando por una parte las características de cada uno de los niveles y por otra las fases de aprendizaje básicas en la organización y diseño de la unidad de enseñanza.

Finalmente en la sección 2.5 se presentan en forma teórica y esquemática los contenidos y relaciones estudiadas en la unidad de enseñanza.

2.1 DEFINICIÓN, ELABORACIÓN Y PLANIFICACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA.

Para el desarrollo de un buen proceso en la actividad matemática dentro del aula de clase, intervienen algunos factores determinantes los cuales se van desenvolviendo mediante la definición, elaboración y planificación de una unidad didáctica. En la medida en que esta unidad se va ejecutando, el estudiante avanza en la consecución de sus conocimientos y competencias matemáticas.

Con las diferentes actividades que se desarrollaron para la enseñanza de las funciones trigonométricas se organizó una unidad didáctica, es por ello que se dan los siguientes referentes didácticos.

2.1.1 Definición de unidad didáctica.

Varios investigadores se han ocupado en definir que es una unidad didáctica, a continuación presentamos algunas de ellas:

“La unidad didáctica o unidad de programación será la planeación todos los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje con una coherencia metodológica interna y por un período de tiempo determinado”[1].

“La unidad didáctica es la interrelación de todos los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje con una coherencia interna metodológica y por un periodo de tiempo determinado”.[2]

[1] ANTÚNEZ S. y OTROS. Del proyecto educativo a la programación de aula. Barcelona, Graó. 1992.
[2] Ibáñez, J. Planificación de unidades didácticas: una propuesta de formalización.1992.

"Unidad de programación y actuación docente configurada por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos didácticos. Una unidad didáctica da respuesta a todas las cuestiones curriculares al qué enseñar (objetivos y contenidos), cuándo enseñar (secuencia ordenada de actividades y contenidos), cómo enseñar (actividades, organización del espacio y del tiempo, materiales y recursos didácticos) y a la evaluación (criterios e instrumentos para la evaluación), todo ello en un tiempo claramente delimitado"[3].

"La unidad didáctica es una forma de planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje alrededor de un elemento de contenido que se convierte en eje integrador del proceso, aportándole consistencia y significatividad. Esta forma de organizar conocimientos y experiencias debe considerar la diversidad de elementos que contextualizan el proceso (nivel de desarrollo del alumno, medio sociocultural y familiar, Proyecto Curricular, recursos disponibles) para regular la práctica de los contenidos, seleccionar los objetivos básicos que pretende conseguir, las pautas metodológicas con las que trabajará, las experiencias de enseñanza-aprendizaje necesarios para perfeccionar dicho proceso».

En resumen y simplificando, podemos señalar que **la unidad didáctica es la unidad básica de programación**.

2.1.1 Elaboración de una unidad didáctica.

La elaboración de unidades didácticas tiene que tener en cuenta los documentos oficiales y el proyecto educativo institucional. Implica la toma de decisiones en distintos ámbitos de concreción hasta culminar en un documento en el que el profesor concreta los objetivos, contenidos, actividades, recursos y materiales,

[3] MEC. Orientación y Tutoría en Primaria y Secundaria. Madrid. 1992.

instrumentos de evaluación y selección de estrategias metodológicas. Este documento será un **instrumento de planificación y gestión del trabajo en clase con los alumnos**.

2.1.2 Planificación de una unidad didáctica.

El diseño de las unidades didácticas debe basarse en estos seis elementos que se describen a continuación:

1. La información disponible sobre los **objetivos y contenidos del currículo y del proyecto central** correspondiente.

   Esta información no es suficiente para asegurar que los alumnos realicen una actividad matemática "rica" que contemple los diferentes aspectos de dicha actividad. Por tanto, conviene tener en cuenta en segundo lugar el elemento dos.

2. Los **tipos de problemas que son el campo de aplicación de los contenidos matemáticos seleccionados**.

   Las situaciones de la vida cotidiana y las otras ciencias pueden ayudarnos mostrando los problemas que se pueden resolver con los contenidos de la unidad didáctica, mientras que la historia de las matemáticas puede ayudarnos para saber cómo y por qué fueron planteados.

   Los tipos de problemas se resuelven con determinados procedimientos, entre los cuales tendremos que hacer una selección. Estos procedimientos se justifican por medio de unos conceptos que se tendrán que definir de una o varias maneras diferentes, estos conceptos y procedimientos se tendrán que representar por algunas de las diferentes representaciones que se utilizan normalmente, etc.

Por lo tanto, también es conveniente tener en cuenta el siguiente elemento.

3. El conjunto organizado de prácticas institucionales, operativas y discursivas, que proporcionan la solución a los tipos de problemas seleccionados (**contenidos procedimentales, conceptuales y formas de representación**).

   Un análisis a fondo de los contenidos a enseñar, su organización, estructura, relaciones lógicas, técnicas de resolución, formas de representación, etc., es fundamental para diseñar una secuencia didáctica.

   Para este tipo de análisis también puede ser muy útil el estudio de las unidades didácticas que proponen los libros de texto. Un análisis comparativo de la organización que presentan los libros de texto es un elemento importante a tener en cuenta para elaborar una propuesta de unidad didáctica.

Los tres puntos anteriores son los fundamentales para el diseño de unidades. Ahora bien, hay otros aspectos a tener en cuenta. El primero de ellos son los recursos y materiales didácticos, ya que estos tienen una incidencia importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje y pueden condicionar la organización, los contenidos y la metodología de la unidad didáctica.

4. **Materiales y recursos disponibles** para el estudio del tema, incluyendo los libros de texto y experiencias didácticas descritas en las publicaciones accesibles. Otro elemento que conviene tener en cuenta es el conocimiento de los errores y dificultades recurrentes en el estudio del tema que la investigación didáctica ha documentado. Por lo tanto, será el quinto aspecto a tener en cuenta.
5. El conocimiento de los **errores y dificultades recurrentes** en el estudio del tema que la investigación didáctica ha documentado.

6. Los **criterios metodológicos y de evaluación** incluidos en las orientaciones curriculares, así como las recomendaciones aportadas por la investigación didáctica descritas en publicaciones accesibles.

2.2 LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

2.2.1 La importancia de enseñar geometría. [4]

"El conocimiento geométrico es un componente matemático que ocupa un lugar privilegiado en los currículos escolares por su aporte a la formación del individuo". No sólo se considera como un conocimiento básico y necesario para la vida de los estudiantes sino como una disciplina científica que descansa sobre bases de rigor, abstracción y generalidad. Mammana y Villani[5] han identificado unas dimensiones con las cuales se vincula la geometría en las diferentes áreas y ciencias, para adjudicarse su valor de rigurosidad; así la geometría puede verse como:

- Una ciencia del espacio y la forma.
- Un método para representar visualmente conceptos y procesos de otras áreas del conocimiento.
- Un punto de encuentro entre la abstracción y la modelación.
- Una vía para desarrollar pensamiento y comprensión.
- Una herramienta en diversos campos de aplicación.

[4] MEN, Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. Pág. 1-3.
[5] Mammana y Villani. Recogiendo las ideas del Documento de Discusión del estudio del ICMI, Perspectivas de la enseñanza de la Geometría para el siglo XXI., p. 338.

Para Neubrand[6] la importancia radica en que "la toma de conciencia de esta multidimensionalidad, es debida en el cambio del punto de vista de la matemática. Se ve más como una actividad humana y se reconoce su relación en contextos científicos y sociales".

La geometría tiene una larga historia siempre ligada a las actividades humanas; ya sea vista como una ciencia que modela nuestra realidad espacial, como un sistema formal que evoluciona y cambia permanentemente. Actualmente la percepción de esta concepción de geometría, ha venido cambiando en el sentido, de que se concibe como el resultado de la combinación de diversos procesos cognitivos y comunicativos a lo largo de la historia. En este sentido el conocimiento geométrico no es absoluto e impersonal, sino una construcción de toda la humanidad, partiendo de experiencias individuales y grupales mediadas por herramientas simbólicas, que ayudan a resolver e interpretar diversos problemas y a encontrar la explicación de hechos.

La enseñanza de la geometría debe reflejar la preocupación por parte de los docentes a la hora de desarrollar actividades que les permita lograr en los alumnos una amplia experiencia y gusto por el conocimiento geométrico, resolviendo diferentes problemas y hechos que son demostrables.

Niss[7] "Según el nivel escolar se privilegiara una u otra dimensión de la geometría". Por ello se sugiere que en los primeros niveles educativos se enfaticen actividades de exploración para entender los objetos concretos del plano y del espacio, es decir descubrir la geometría por medio de la experiencia; sin embargo es importante que los estudiantes comprendan que hay más de una dimensión, basadas también en reglas y operaciones aritméticas; como lo son las relaciones entre objetos tridimensionales y sus representaciones bidimensionales.

[6] NEUBRAND, A. Basic Experiences in mathematics education.1998.
[7] NISS, M. Las matemáticas en la sociedad. UNO. Revista didáctica de las matemáticas, 6,45-57. 1998.

En los niveles superiores de la educación básica y media, se recomienda afianzar los conocimientos más amplios y profundos, de tal forma que los estudiantes puedan experimentar una gran parte del contexto geométrico. A través de actividades como la construcción de conceptos, la investigación de propiedades geométricas, resolución de problemas y aplicaciones.

Especial importancia cobran las experiencias en diferentes ámbitos tales como la construcción de modelos geométricos físicos y su relación con la percepción visual.

Las diversas dimensiones del panorama geométrico se apoyan en procesos cognitivos de visualización asociados al pensamiento espacial. Por esa razón en los Lineamientos Curriculares en el área de matemáticas, se necesita encaminar la enseñanza de la geometría hacia el desarrollo de la percepción espacial, las representaciones bi y tri dimensionales de las figuras, sus relaciones y sus propiedades produciendo teorías axiomáticas de carácter deductivo.

Para poder diseñar ambientes de aprendizaje ricos en actividades geométricas en las distintas dimensiones, los maestros de matemáticas deben experimentar diversas facetas del panorama geométrico; para que los estudiantes disfruten aprendiendo a aprender geometría.

Actualmente, los programas de geometría como CABRI, GEOGEBRA, entre otros, han revolucionado la manera de hacer matemáticas y la forma de enseñarlas, proporcionando contextos de aprendizaje y potentes posibilidades de representación, donde los estudiantes pasan de formularse preguntas como ¿Por qué? A preguntas como ¿Qué pasa si?, dando pasos hacia el pensamiento deductivo.

2.2.2 ¿Qué geometría enseñar y cómo enseñarla?

Partiendo de la intuición y con base en la experiencia, el enfoque eficaz se apoya en la exploración, descubrimiento y comprensión, conceptos y propiedades geométricas que nos permiten explicar aspectos y situaciones del mundo en que vivimos. Pero el docente debe saber que su meta es crear las condiciones para que el alumno avance en la profundización de la naturaleza deductiva y rigurosa de esta rama de la matemática.

Bishop[8] afirmaba: "la geometría es la matemática del espacio" y es a través del estudio del espacio físico y de los objetos que en él se encuentran por donde el alumno ha de acceder a los conceptos más abstractos de las matemáticas. Entonces podemos admitir que el sentido de espacio y, por ende, el sentido geométrico, se inicia con la experiencia directa que las personas tienen sobre los objetos que les rodean.

2.2.3 Habilidades que la enseñanza de la geometría debe desarrollar.

Hoffer[9] clasifica estas habilidades en cinco áreas: visuales, verbales, de dibujo, lógicas y de aplicación.

Habilidades visuales. La mayor aparte de la información que percibimos entra por nuestros ojos; pero el proceso que nos permite entender el espacio es la visualización, a través de ella podemos representar mentalmente formas visuales externas e internas. Este proceso se lleva a cabo por medio de dos tipos de habilidades, una relacionada con la captación de representaciones visuales

[8] BISHOP, A. (1993): Enculturación Matemática. Barcelona, Paidós.
[9] HOFFER A. La geometría es más que demostración. Notas de matemática. 1990.

externas y la segunda, relacionada con el pensamiento y construcción de imágenes mentales (representaciones visuales internas). Esto implica que visualizar es percepción con comprensión.

Habilidades de dibujo y construcción. Al igual que se hace referencia en el párrafo anterior, para poder dar idea de un concepto de cualquier área del conocimiento recurrimos normalmente al uso de representaciones externas escritura, trazo, dibujo, etc. Con las cuales damos vida visual a imágenes y objetos mentales.

En la geometría, los símbolos y representaciones, sirven también al pensamiento para crear más conocimientos, debido a que permiten la manipulación abstracta de muchos elementos y las relaciones y propiedades que juegan entre ellos.

Para el aprendizaje de la geometría, los alumnos deben desarrollar habilidades de dibujo y construcción relacionadas con la representación de figuras y cuerpos, asimismo, deben ser capaces de efectuar una reproducción a partir de modelos propuestos y realizar una construcción sobre una base de datos dados de manera oral, escrita o gráfica.

Habilidades de comunicación. La habilidad de comunicación es la competencia que permite al alumno leer, interpretar y comunicar con sentido, en forma oral y escrita, información geométrica y de todo tipo, usando el vocabulario y los símbolos del lenguaje matemático de forma adecuada. Dickson y otros (1991) dicen que el poseer esta habilidad de comunicación supone la aptitud para oír hablar y hablar de matemática, lo mismo que para leer y escribir acerca de ella.

Reconocemos como habilidades de comunicación: escuchar, localizar, leer e interpretar información geométrica presentada en diferentes formatos, para la adquisición de estas habilidades de comunicación es muy importante tomar en cuenta, tanto el lenguaje como la buena elección de los materiales que han de ser escogidos para el desarrollo del pensamiento geométrico.

La adquisición de los conceptos y el lenguaje resulta un proceso dinámico. El trabajo en equipo, estimula y promueve tal dinamismo ya que permite que los alumnos practiquen la comunicación de sus ideas, forzándolos a externar las asociaciones mentales que hacen entre los símbolos y sus significados, así como de los conceptos que usan o elaboran.

Habilidades de razonamiento. Para razonar deductiva e inductivamente, requerimos de las habilidades de razonamiento analítico, es decir, son las capacidades necesarias para desarrollar un argumento lógico.

Las habilidades lógicas que se deben desarrollar con el estudio de la geometría en la educación básica y media se refieren a la abstracción de conceptos y relaciones, generación y justificación de conjeturas, formulación de contraejemplos, entre otros. La inducción y la deducción son dos formas de pensamiento consideradas dentro del razonamiento lógico, de hecho conforman dos de los métodos matemáticos para producir conocimientos.

El razonamiento inductivo es la capacidad de realizar con éxito actividades como: comparar, completar series de símbolos o figuras, clasificar objetos y generalizar propiedades a partir de ejemplos concretos, entre otras. El método inductivo es considerado el camino del razonamiento que va de lo particular a lo general.

La deducción, por su parte, es un método de razonamiento que va de lo general a lo particular. A través del razonamiento deductivo se demuestra la veracidad de las proposiciones a las que se arribaron por inducción.

Alguna de las actividades que colaboran a que los estudiantes desarrollen el pensamiento lógico son: inferir, dadas las propiedades de un objeto, deducir de que objeto geométrico se trata; clasificar objetos geométricos por sus atributos, etc.

La intuición es una forma de percatarnos, sin mucho análisis, de conceptos y situaciones para tratar de entender el mundo que nos rodea, es decir, intentamos, en un primer plano, la comprensión de lo que queremos saber, sin embargo, dada su imprecisión por ser una percepción de primera instancia, solemos equivocarnos o adquirirla con limitaciones, pero aun con estas deficiencias, la intuición nos resulta tremendamente útil.

En nuestro quehacer docente se ha encontrado que es imposible separar las actividades que impliquen desarrollo de habilidades lógicas de aquellas que tienen que ver con la aplicación y transferencia de conocimientos (resolución de problemas).

Habilidades de aplicación o transferencia. En la resolución de problemas están implicados tanto procesos cognitivos como meta cognitivos en donde se ponen en juego todas las formas de razonamiento creativo y lógico mencionadas anteriormente, aplicando entonces la modelación.

Una de las cosas a tener en cuenta en la enseñanza de la geometría, es que no se puede obligar a los estudiantes a avanzar rápidamente y llevarlos a niveles de alta dificultad, sin antes llevarlos en un proceso de construcción de ideas y conocimientos, a través de la visualización y las cinco habilidades a desarrollar mencionadas anteriormente, para que los jóvenes logren formalizar esta disciplina con la ayuda de la experimentación.

2.3 ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA TRIGONOMETRÍA.

Presentamos algunas ideas importantes de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría que hemos tenido en cuenta en el diseño de nuestra unidad de enseñanza de las funciones trigonométricas.

Basamos nuestra propuesta de enseñanza y de aprendizaje en cuatro ejes:

1. Conceptual: Relativo al aprendizaje de los conceptos y propiedades matemáticos implicados.
2. Curricular: Relativo a los contenidos matemáticos sugeridos en los currículos oficiales y trabajados en los libros de texto. Incorporación de los procesos de razonamiento y demostración, conexiones y representación.
3. Metodológico: Relativo al uso de un enfoque geométrico para la enseñanza de las razones trigonométricas, que incluye un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como apoyo en un contexto de enseñanza por descubrimiento guiado, el uso de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele para el diseño de las actividades.
4. Formativo: Relativo al objetivo de mejorar la habilidad de demostración matemática de los estudiantes mediante el requerimiento a estos de validar sus resultados y descubrimientos.

2.3.1 Algunas dificultades en el aprendizaje de la trigonometría.

La enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría es un campo poco explorado por los investigadores en didáctica de las matemáticas. Markel, Goldin, Fi y Brown plantean que la trigonometría en el plano coordenado es un tema difícil para los estudiantes y que es muy poco lo que se ha hecho para investigar los motivos de dichas dificultades. Hay muchos factores que podrían estar involucrados. Uno de estos problemas radica en que la trigonometría es un tema complicado e interconectado que lleva a que los estudiantes tengan que estar cambiando las definiciones dadas para las razones trigonométricas de acuerdo al enfoque y contexto planteado. Por ejemplo, al cambiar del estudio de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo al plano cartesiano, se cambia de una definición geométrica a una definición analítica, se cambia de analizar los valores de los lados del triángulo rectángulo a analizar los valores de las coordenadas del plano y el radio de la circunferencia, se cambia de un concepto de ángulo como región comprendida entre dos lados del triángulo a un concepto de ángulo como giro o rotación, los valores del ángulo pasan de ser valores de ángulos agudos o rectos ($0º \leq \theta \leq 90º$) a ángulos positivos y negativos, al menos en el intervalo $-360º \leq \theta \leq 360º$. Ahora las razones trigonométricas no son solamente una relación o cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo, sino distancias dirigidas en el plano cartesiano o coordenadas del punto de intersección entre el lado terminal del ángulo y el circulo goniométrico.

Brown[10] identifica los siguientes factores que afectan la clara comprensión de los conceptos trigonométricos: definiciones débiles de ideas importantes sobre las rotaciones y el círculo goniométrico; poca o ninguna comprensión del papel de la unidad en el círculo goniométrico o aplicación inconsistente de la unidad; dificultad para interpretar los gráficos coordenados como información geométrica y numérica combinada, lo que implica no ver las coordenadas de un punto como números y longitudes dirigidas de los segmentos horizontales y verticales que conectan el punto con los ejes; dificultad para comprender el sen(x) y el cos(x) como coordenadas, lo que implica la carencia de asociar los signos positivo o negativo de las coordenadas *x*, *y* a los signos del sen(x) y cos(x) de ángulos no agudos; dificultad para entender los números racionales como números y como cocientes. Esto se relaciona con el hecho de que el sen(x) es un sólo valor, cuando se está describiendo como una distancia o una coordenada, o un cociente de dos números en la trigonometría del triángulo rectángulo.

Las ideas de Freudenthal[11] acerca del tema "razón" nos aproximan a la complejidad implícita en el tema de las "razones trigonométricas":

---

10 BROWN, C. Report on American Education: How Well Are American Students Learning? 2006.
11 FREUDENTHAL, H. Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (L. Puig, Trans.). En E. Sánchez (Ed.), Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados) (2ª edición). México D.F. Departamento de Matemática Educativa. 2001.

La razón es una función de un par ordenado de números o valores magnitud. También lo son la suma, la diferencia, el producto y el cociente, pero éstos lo son en sentido algorítmico: hay una receta para obtener el valor de la función correspondiente a un par determinado o al menos para actuar como si se hubiera obtenido – en efecto, ¿qué se ha obtenido si se contesta a 3:4 con $\frac{3}{4}$?

La razón también puede obtenerse transformándola en un cociente, pero esta es la violación de la razón. Si se hace, se priva a la razón de lo que la hace valiosa como razón. La razón es una función de un par ordenado de números o valores de magnitud. Pero, ¿Qué hay de los valores de esa función? ¿Números o valores de magnitud, de nuevo? Se puede interpretar así, pero es la manera errónea de hacerlo. En efecto esto identificaría razón con cociente. El significado propio de la razón es hablar sobre igualdad (o desigualdad) de razones sin conocer el tamaño de la razón.[12]

Freudenthal, también plantea que la razón, en cuanto a concepto e incluso en cuanto a objeto mental, requiere un nivel de desarrollo considerablemente alto. Sin embargo los niños pueden manejar la semejanza como una equivalencia operativa. Las congruencias y las semejanzas son rasgos incorporados en la parte del sistema nervioso central que procesa nuestras percepciones ópticas, es evidente que el niño está lejos de la semejanza como objeto mental y como concepto. Criterios para la conservación de la razón como: conservación de la igualdad de longitudes, conservación de la congruencia, conservación de las razones internas, constancia de la razón externa, conservación de los ángulos y decidir acerca de la necesidad y suficiencia de tales criterios, son necesarios para

[12] FREUDENTHAL, H. Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (L. Puig, Trans.). En E. Sánchez (Ed.), Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados) (2[a] edición). México D.F. Departamento de Matemática Educativa. 2001.

la formación del objeto mental semejanza. Una temprana familiaridad con las aplicaciones que conservan la razón ayuda a visualizar los contextos de la razón que no son visuales a priori, pero se requiere que la razón visualizada se suelte en cierta forma del contexto de las semejanzas globales. “Para construir un puente de razones no visuales a razones visuales, la visualización estricta por semejanza ha de ser debilitada”[13].

2.4 EL MODELO DE VAN HIELE.

El modelo de Van Hiele, está formado por dos componentes: una componente descriptiva formada por los niveles de razonamiento, que detallan la forma como los estudiantes razonan cuando efectúan diversas actividades para un tema, desde el razonamiento intuitivo hasta el razonamiento abstracto formal y una componente instructiva, las fases de aprendizaje, que ayudan al profesor a organizar las actividades para que sus estudiantes puedan avanzar de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior.

El modelo considera cinco niveles de razonamiento, siendo el último el nivel de rigor, el cual no se alcanza en la escuela secundaria, por lo que en esta investigación no será tenido en cuenta. Es característico de la teoría el seguimiento de un orden, la adyacencia, las relaciones y el lenguaje propio de cada uno de los niveles. En el modelo se considera que pasar de un nivel de pensamiento y conocimiento a otro no va asociado a la edad y sólo alcanzado un nivel se puede conseguir el siguiente, además dos personas que razonan en niveles diferentes no se pueden entender.

[13] Ibíd., p. 100.

El modelo de Van Hiele es la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución y que está adquiriendo cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a geometría escolar.

Van Hiele propone cinco niveles de desarrollo del pensamiento geométrico que muestran un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría. Estos niveles son:

2.4.1 El Nivel 0. Visualización. Llamado también de familiarización, en el que el alumno percibe las figuras como un todo global, sin detectar relaciones entre tales formas o entre sus partes. Por ejemplo, un niño de seis años puede reproducir un cuadrado, un rombo, un rectángulo; puede recordar de memoria sus nombres. Pero no es capaz de ver que el cuadrado es un tipo especial de rombo o que el rombo es un paralelogramo particular. Para él son formas distintas y aisladas.

En este nivel, los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son clases de figuras reconocidas visualmente como de “la misma forma”.

- Proceso de descripción: Los estudiantes razonan sobre conceptos básicos, tales como formas simples, principalmente por medio de consideraciones visuales del concepto como un todo[14].
- Proceso de definición: Los estudiantes describen las propiedades y elementos físicos de los objetos matemáticos.
- Proceso de demostración: No hay razonamiento matemático, por lo que no realizan ningún tipo de demostración[15].

2.4.2 El Nivel 1. Análisis. De conocimiento de las componentes de las figuras, de sus propiedades básicas.

[14] BURGER, W.F.; SHAUGHNESSY, J.M: Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, Journal for Research in Mathematics Education vol. 17n°1, pp. 31-48. 1986.
[15] GUTIERREZ (2007) tomado de ALGARÍN, D. L. Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. (Tesis de maestría) Bucaramanga. 2013.

Estas propiedades van siendo comprendidas a través de observaciones efectuadas durante trabajos prácticos como mediciones, dibujo, construcción de modelos, etc. El niño, por ejemplo, ve que un rectángulo tiene cuatro ángulos rectos, que las diagonales son de la misma longitud, y que los lados opuestos también son de la misma longitud. Se reconoce la igualdad de los pares de lados opuestos del paralelogramo general, pero el niño es todavía incapaz de ver el rectángulo como un paralelogramo particular.

En este nivel los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son las clases de figuras, piensan en términos de conjuntos de propiedades que asocian con esas figuras.

- Proceso de descripción: Los estudiantes razonan sobre los conceptos por medio de un análisis informal de las relaciones y propiedades, se establecen las propiedades necesarias del concepto[16].
- Proceso de definición: Los estudiantes describen propiedades y elementos matemáticos de los conceptos, usan definiciones de estructura lógica simple, construyen definiciones a partir de un listado de las propiedades conocidas[17].
- Proceso de demostración: Los estudiantes realizan demostraciones de tipo empírico ingenuo, experimento crucial basado en ejemplo, experimento crucial constructivo y ejemplo genérico analítico[18].

2.4.3 El Nivel 2. Ordenamiento o de Clasificación. Las relaciones y definiciones empiezan a quedar clarificadas, pero sólo con ayuda y guía. Ellos pueden clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y dar argumentos informales para justificar sus clasificaciones; por ejemplo, un cuadrado es identificado como un rombo porque puede ser considerado como “un

[16] BURGER, W.F.; SHAUGHNESSY, J.M.: Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, Journal for Research in Mathematics Education vol. 17n°1, pp. 31-48. 1986.
[17] GUTIERREZ (2007) tomado de ALGARÍN, D. L. Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. (Tesis de maestría) Bucaramanga, 2013.
[18] FIALLO, J. Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia. 2010.

rombo con unas propiedades adicionales". El cuadrado se ve ya como un caso particular del rectángulo, el cual es caso particular del paralelogramo. Comienzan a establecerse las conexiones lógicas a través de la experimentación práctica y del razonamiento.

En este nivel, los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son las propiedades de clases de figuras.

- Proceso de descripción: Se considera que en este nivel no se da la descripción.
- Proceso de definición: Los estudiantes ordenan lógicamente las propiedades de los conceptos, construyen definiciones abstractas y pueden distinguir entre la necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades al determinar un concepto[19]. Usan cualquier tipo de definición[20].
- Proceso de demostración: Realizan demostraciones de tipo ejemplo genérico intelectual, experimento mental transformativo y experimento mental estructurado[21].

2.4.4 El Nivel 3. Razonamiento deductivo. En él se entiende el sentido de los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero sólo no se hacen razonamientos abstractos, ni se entiende suficientemente el significado del rigor de las demostraciones.

Las investigaciones de Van Hiele y de los psicólogos soviéticos muestran que el paso de un nivel a otro no es automático y es independiente de la edad. Muchos adultos se encuentran en un nivel 0 porque no han tenido oportunidad de enfrentarse con experiencias que les ayuden a pasar al nivel 1.

---

[19] BURGER, W.F.; SHAUGHNESSY, J.M.: Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, Journal for Research in Mathematics Education vol. 17n°1, pp. 31-48. 1986.

[20] GUTIERREZ (2007) tomado de ALGARÍN, D. L. Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. (Tesis de maestría) Bucaramanga. 2013.

[21] FIALLO, J. Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia. 2010.

- Proceso de descripción: Se considera que en este nivel no se da la descripción.
- Proceso de definición: Los estudiantes razonan formalmente dentro del contexto de un sistema matemático completo, con términos indefinidos, axiomas, un sistema lógico subyacente, definiciones y teoremas[22]. Se admite la existencia de definiciones equivalentes, se puede demostrar la equivalencia de definiciones[23].
- Proceso de demostración: Los estudiantes realizan demostraciones de tipo experimento mental estructurado, deductiva formal transformativa y deductiva formal estructurada[24].

En la Tabla 1, se muestra la relación entre los procesos y los niveles de razonamiento. Las celdas sombreadas representan los niveles en los cuales determinados procesos no se dan.

En el modelo de Van Hiele se proponen una serie de fases de aprendizaje para pasar de un nivel a otro, las fases no se asocian a un nivel determinado. Para Crowley[25], el método y la organización de la institución, así como los contenidos y el material utilizado, son áreas importantes de interés pedagógico.

- *Fase 1* Información: Crowley afirma que en esta etapa inicial el profesor y los estudiantes conversan y realizan actividades sobre los objetos de estudio de este nivel. Al respecto, Jaime y Gutiérrez[26] expresan que:

[22] BURGER, W.F.; SHAUGHNESSY, J.M.: Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, Journal for Research in Mathematics Education vol. 17n°1, pp. 31-48. 1986.
[23] GUTIERREZ (2007) tomado de ALGARÍN, D. L. Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. (Tesis de maestría) Bucaramanga. 2013.
[24] FIALLO, J. Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia. 2010.
[25] CROWLEY, M.: The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. 1987.
[26] GUTIERREZ (2007) tomado de ALGARÍN, D. L. Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. (Tesis de maestría) Bucaramanga. 2013.

Tabla 1. Relación entre procesos y niveles de razonamiento

	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3
DESCRIPCIÓN	Descripción de propiedades y elementos físicos de los objetos matemáticos.	Descripción de propiedades y elementos matemáticos de los conceptos.		
USO DE DEFINICIONES		Definiciones con una estructura lógica simple.	Cualquier tipo de definición.	Admite la existencia de definiciones equivalentes.
FORMULACIÓN DE DEFINICIONES	Descripción de características físicas de las figuras.	Lista de las propiedades conocidas de ese concepto.	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes.	Se puede demostrar la equivalencia de definiciones.
DEMOSTRACIÓN		Verificación empírica de las propiedades en uno o varios ejemplos.	Demostraciones deductivas informales, pero generalmente con ayuda de ejemplos concretos.	Demostraciones deductivas formales.

Fuente: Los autores.

Se trata de una fase de contacto: el profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear, qué materiales van a utilizar, etc. Así mismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos e imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático propiamente dicho.

> Esta es también una fase de información para el profesor, pues sirve para que éste averigüe los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema que se va abordar.

"El propósito de estas actividades es doble: (1) el profesor ve cuáles son los conocimientos previos de los estudiantes en relación al tema, y (2) los estudiantes ven qué dirección tomarán loes estudios posteriores"[27].

- F*ase 2* Orientación dirigida: Según Crowley[28] en esta fase:

> Los estudiantes exploran el tema de estudio a través de los materiales que el profesor ha ordenado cuidadosamente. Estas actividades deben revelar gradualmente a los estudiantes las estructuras características de este nivel, de este modo, la mayoría del material serán tareas simples diseñadas para obtener respuestas específicas.

Para Jaime y Gutiérrez, el objetivo principal es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan los principales conceptos, propiedades, figuras, etc. En el área de la geometría que están estudiado ya que se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel.

De la organización y diseño de las actividades que el profesor realice en esta fase depende en gran medida el éxito de los estudiantes para pasar de un nivel de razonamiento a otro superior[29].

- *Fase 3* Explicitación: Crowley expresa que apoyándose en sus experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus incipientes puntos de

[27] CROWLEY, M.: The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. 1987.
[28] Ibíd., p. 4.
[29] FIALLO, J. Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia. 2010.

vista acerca de las estructuras que han observado. Para Jaime y Gutiérrez[30]:

> Una de las principales finalidades de la tercera fase es hacer que los estudiantes intercambien experiencias, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen cómo han resuelto las actividades, todo ello dentro de un contexto de dialogo en el grupo. Es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que intento de cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas (o las de su compañero), que ordenarlas y expresarlas con claridad.

El papel del profesor consiste en ayudar a los estudiantes a que usen un lenguaje preciso y apropiado para describir sus experiencias y comunicar sus conocimientos, lo que ayuda a afianzar los nuevos saberes.

- *Fase 4* Orientación libre: Crowley [31] expresa que en esta fase los estudiantes encuentran tareas más complejas, tareas con muchos pasos, tareas que se pueden realizar de varias formas y actividades abiertas. Para Jaime y Gutiérrez [32] en esta fase los estudiantes perfeccionan su conocimiento mediante problemas, en los cuales se colocarán indicios que muestren el camino a seguir, de forma que el estudiantes tenga que combinarlos adecuadamente aplicando los conocimientos y la forma de razonar que ha adquirido en las fases anteriores. Con estas actividades los estudiantes pueden completar la red de relaciones que comenzó a formar en las fases anteriores.
- *Fase 5* Integración: para Crowley los estudiantes analizan y resumen lo que han aprendido, con el fin de tener una visión global de la nueva red de

[30] JAIME Y GUTIERREZ, (1990) tomado de ALGARÍN, D. L. Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. (Tesis de maestría) Bucaramanga. 2013.
[31] CROWLEY, M.: The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. 1987.
[32] JAIME Y GUTIERREZ (1990) tomado de ALGARÍN, D. L. Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. (Tesis de maestría) Bucaramanga. 2013.

objetos y relaciones, el profesor ayuda con observaciones globales, pero es importante que los resúmenes no contenga nada nuevo. Jaime y Gutiérrez explican que en esta fase los estudiantes adquieren una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente, además al completar la fase tendrán una nueva red de relaciones mentales y habrán adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

En cuanto a la evaluación, se considera de la misma forma como se tiene en cuenta en el modelo, ya que es una de las claves para la asignación de niveles, por esto se precisan algunas ideas previas:

1. El nivel de razonamiento de los estudiantes depende del área de las Matemáticas que se trate.

2. Se debe evaluar cómo los estudiantes contestan y el por qué de sus respuestas, más no lo que omiten, o responden bien o mal.

3. En las preguntas no está el nivel de los estudiantes sino que está en sus respuestas.

4. En unos contenidos se puede estar en un nivel y, en otros diferentes, en nivel distinto.

5. Cuando se encuentran en el paso de un nivel a otro puede resultar difícil determinar la situación real en que se encuentran.

2.5 CONTENIDOS MATEMÁTICOS: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

2.5.1 Historia de la Trigonometría.[33]

El origen de la palabra trigonometría proviene del griego “trígonos” (triángulo) y “metros”(metría).

Los babilonios y los egipcios (hace más de 3000 años) fueron los primeros en utilizar los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas para efectuar medidas en agricultura y para construir pirámides. Posteriormente se desarrolló más con el estudio de la astronomía mediante la predicción de las rutas y posiciones de los cuerpos celestes y para mejorar la exactitud en la navegación y en el cálculo del tiempo y los calendarios.

El estudio de la trigonometría pasó después a Grecia, donde destaca el matemático y astrónomo Griego Hiparco de Nicea. Más tarde se difundió por India y Arabia donde era utilizada en la Astronomía. Desde Arabia se extendió por Europa, donde finalmente se separa de la Astronomía para convertirse en una rama independiente de las Matemáticas.

A finales del siglo VIII los astrónomos Árabes trabajaron con la función sen(x) y a finales del siglo X ya habían completado la función sen(x) y las otras cinco funciones. También descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría.

A principios del siglo XVII, el matemático John Napier inventó los logaritmos y gracias a esto los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje.

A mediados del siglo XVII Newton encontró la serie para el $\operatorname{sen}(x)$ y series similares para el $\cos(x)$ y la $\tan(x)$. Con la invención del cálculo las funciones

33< http://trigonometriasonia.blogspot.com/2008/10/historia-de-la-trigonometra.html>. [citado en 16 de noviembre de 2013].

trigonométricas fueron incorporadas al análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

Por último, en el siglo XVIII, el matemático Leonhard Euler demostró que las propiedades de la trigonometría eran producto de la aritmética de los números complejos y además definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos.

A continuación, haremos una breve reseña sobre las razones trigonométricas, esto es debido a que para estudiar las funciones trigonométricas es necesario conocer primero las razones.

2.5.2 Razones trigonométricas.

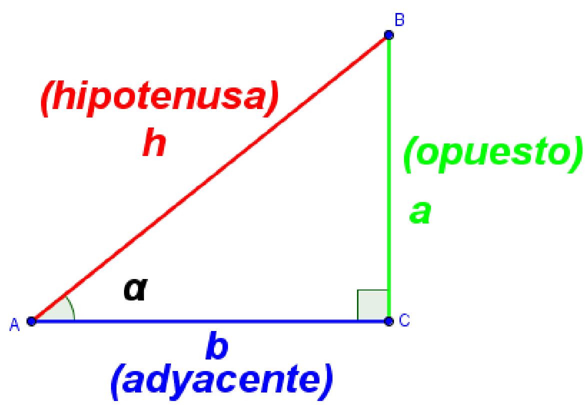
Las razones trigonométricas se definen comúnmente como el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo asociado a sus ángulos. Existen seis razones trigonométricas básicas.

Para definir las razones trigonométricas del ángulo: α, del vértice A, se parte de un triángulo rectángulo arbitrario que contiene a este ángulo. El nombre de los lados de este triángulo rectángulo que se usará en los sucesivos será:

- La hipotenusa (h) es el lado opuesto al ángulo recto, o lado de mayor longitud del triángulo rectángulo.
- El cateto opuesto (a) es el lado opuesto al ángulo que queremos determinar.
- El cateto adyacente (b) es el lado adyacente al ángulo del que queremos determinar.

Todos los triángulos considerados se encuentran en el Plano Euclidiano, por lo que la suma de sus ángulos internos es igual a pi radianes (o 180°). En consecuencia, en cualquier triángulo rectángulo los ángulos no rectos se encuentran entre 0 y π/2 radianes. Las definiciones que se dan a continuación definen estrictamente las funciones trigonométricas para ángulos de este rango.

Figura 1. Representación triángulo rectángulo.



1) El **sen(x)** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la longitud de la hipotenusa:

$$\sin(\alpha) = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{h}$$

   El valor de esta relación no depende del tamaño del triángulo rectángulo que elijamos, siempre que tenga el mismo ángulo α, en cuyo caso se trata de triángulos semejantes.

2) El **cos(x)** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto adyacente y la longitud de la hipotenusa:

$$\cos(\alpha) = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{h}$$

3) La **tan(x)** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la del cateto adyacente:

$$\tan(\alpha) = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{a}{b}$$

2.5.3 Funciones trigonométricas.

Las funciones trigonométricas son establecidas con el fin de extender la definición de las razones trigonométricas a todos los números reales y complejos; son de gran importancia en física, astronomía, cartografía, náutica, telecomunicaciones, la representación de fenómenos periódicos, y otras aplicaciones.

Las funciones trigonométricas definidas sobre el círculo goniométrico son seis: sen(x), cos(x), tan(x), cot(x) (reciproca de la tan(x)), sec(x) (reciproca del cos(x)) y csc(x) (reciproca del sen(x)). Para este proyecto se desarrollaron actividades sólo para las tres primeras.

2.4.6.1 Función Sen(x).

En trigonometría, el sen(x) (abreviado sin, abreviatura derivada del latín *sĭnus*) de un ángulo en un triángulo rectángulo se define como la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

En matemáticas el seno de x, sen(x) es una función continua y periódica obtenida al hacer variar la razón mencionada, siendo una de las funciones trascendentes.

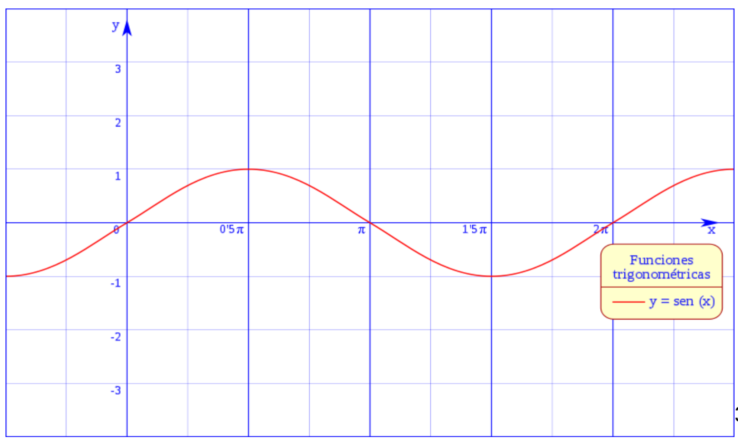
Etimología.

El astrónomo y matemático hindú Aria Bhatta (476–550 d. C.) estudió el concepto de «sen(x)» con el nombre de *ardhá-jya*, siendo *ardhá:* 'mitad, medio', y *jya:* 'cuerda'). Cuando los escritores árabes tradujeron estas obras científicas al árabe, se referían a este término sánscrito como *jiba*. Sin embargo, en el árabe escrito se omiten las vocales, por lo que el término quedó abreviado *jb*. Escritores posteriores que no sabían el origen extranjero de la palabra creyeron que *jb* era la abreviatura de *jiab* (que quiere decir 'bahía').

A finales del siglo XII, el traductor italiano Gherardo de Cremona (1114-1187) tradujo estos escritos del árabe al latín reemplazó el insensato *jiab* por su contraparte latina *sinus* ('hueco, cavidad, bahía'). Luego, ese *sinus* se convirtió en el español «sen(x)».

Según otra explicación, la cuerda de un sólo, se denomina en latín *inscripta corda* o simplemente *inscripta*. La mitad de dicha cuerda se llama *semis inscríptae*. Su abreviatura era *s. ins.*, que terminó simplificada como *sins*. Para asemejarla a una palabra conocida del latín se la denominó *sinus*.

Figura 2. Representación gráfica función sen(x).



[34]

2.4.6.2 Función Cos(x).

En trigonometría, el cos(x) (abreviado cos) de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se define como la razón entre el cateto adyacente a dicho ángulo y la hipotenusa:

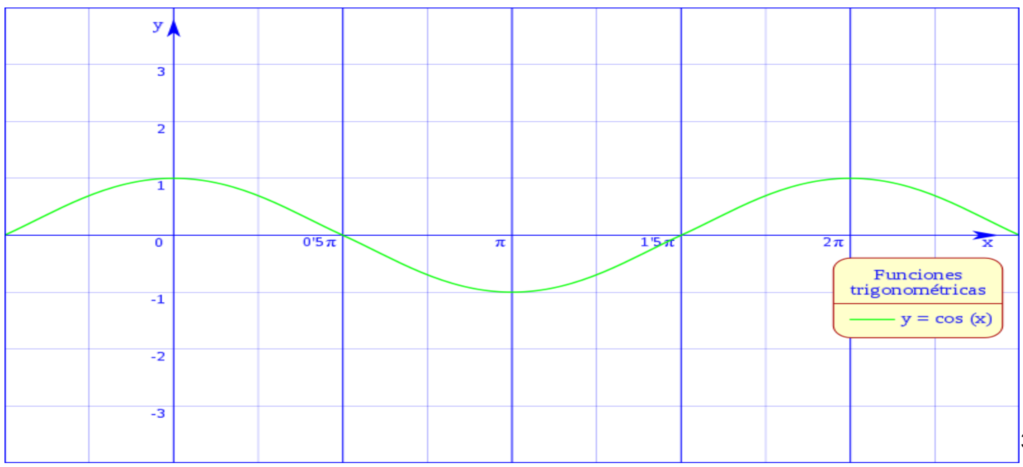
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

En virtud del Teorema de Tales, este número no depende del triángulo rectángulo escogido y, por lo tanto, está bien construido y define una función del ángulo α.

[34] <http://es.wikipedia.org/wiki/Sen(x)_%28trigonometr%C3%ADa%29> [citado en 16 de noviembre de 2013].

Otro modo de obtener el cos(x) de un ángulo consiste en representar éste sobre la circunferencia , es decir, la circunferencia unitaria centrada en el origen. En este caso el valor del cos(x) coincide con la abscisa del punto de intersección del ángulo con la circunferencia. Esta construcción es la que permite obtener el valor del cos(x) para ángulos no agudos.

Figura 3. Representación gráfica función cos(x).



[35]

2.4.6.3 Función Tan(x).

En trigonometría, la tan(x) (abreviado tan) de un ángulo en un triángulo rectángulo se define como la razón entre el cateto opuesto y el adyacente:

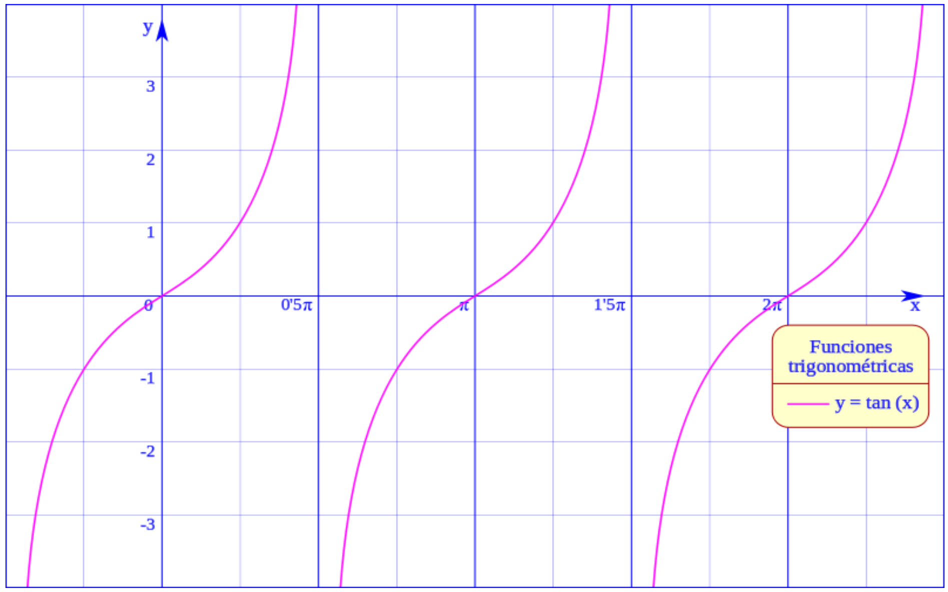
$$\tan\ \alpha\ = \frac{a}{b}$$

O también como la relación entre el sen(x) y el cos(x):

$$\tan\ \alpha\ = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

[35] <http://es.wikipedia.org/wiki/Cos(x)> [citado en 16 de noviembre de 2013].

Figura 4. Representación gráfica función Tan(x).



3. METODOLOGÍA

La presente propuesta se inscribió en el campo de la didáctica de las matemáticas; con un enfoque descriptivo; se empleó la metodología de Investigación acción. Para su análisis se tuvo en cuenta dos métodos; un método cualitativo en cuanto permite dotar de significado el estudio del comportamiento de los sujetos sometidos al estudio; y un método cuantitativo que proporciona datos susceptibles de análisis estadístico que permitió validar los resultados. Los instrumentos para la recolección de la información fueron: observación directa, el diario de campo para recoger la información de lo observado, cuestionarios, grabaciones en audio y video, mapas conceptuales, exposiciones.

Población y muestra.

La población fueron los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Francisco Arango, y la muestra estaba conformada por 11 estudiantes de la población antes mencionada, los cuales de manera voluntaria quisieron participar en el presente proyecto. Para el análisis no se tuvo en cuenta la edad, ni el sexo.

3.1 FASES DE LA INVESTIGACIÓN.

La investigación se realizó teniendo en cuenta la siguiente secuencia:

1. Fase de revisión teórica. Se estudiaron detalladamente los lineamientos curriculares, propuestos por el M.E.N., y se seleccionó el nivel y algunos aspectos históricos así como su incidencia en la enseñanza-aprendizaje de la geometría en la educación media y básica secundaria; además de profundizar en los contenidos objeto de investigación.

2. Fase de diseño. Diseño de instrumentos de seguimiento y evaluación; al igual que el diseño de las actividades de la unidad didáctica, basados en los niveles de Van Hiele de tal manera que proporcionó un ambiente favorable de aprendizaje.

3. Fase de validación. Se experimentaron y validaron las estrategias, mediante una prueba piloto.

4. Fase de análisis. A través de la observación directa, los diarios de campo y las actividades desarrolladas por los estudiantes se determinó el impacto de las estrategias y la comprensión de los conceptos por parte del estudiante.

Se realizó el procesamiento y análisis continuo de los resultados obtenidos, y se realizaron los ajustes respectivos según las necesidades de los estudiantes, en coordinación con el titular de la materia.

5. Fase de síntesis .Elaboración del presente documento con sus conclusiones y recomendaciones.

4. DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

A continuación se presenta la descripción de las actividades realizadas, las guías completas se encuentran en los anexos de este trabajo. Para cada actividad se muestran los objetivos de aprendizaje, la explicación de cada sub-actividad, en caso de ser necesario se describen los archivos usados en Geogebra, y por último se modelan algunas de las actuaciones para cada proceso que se esperan de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades.

4.1 ACTIVIDAD 1. HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA.

Con esta actividad se persiguen los siguientes objetivos: 1) Conocer la historia, definición y aplicaciones de la trigonometría. 2) Identificar las ramas y áreas de aplicación de la trigonometría. 3) Fomentar la reflexión y la discusión sobre conceptos básicos de la trigonometría. 4) Promover el desarrollo de los procesos de descripción, definición y demostración.

En esta actividad no se hace uso del software, los estudiantes deben identificar los aspectos relevantes que hicieron posible el constructo del argumento teórico de la trigonometría. Los diversos problemas que tuvieron los sabios de la antigüedad para resolver situaciones y como a través de la trigonometría pudieron darles solución.

DESCRIPCIÓN: Los estudiantes revisaron la presentación de Power Point "Historia, definición y campos de aplicación de la trigonometría" (Ver anexo 1). En la cual identificaron características propias de ella como: su definición y sus ramas fundamentales, algunas aplicaciones, además de la importancia de esta rama de las matemáticas en el estudio de disciplinas como la arquitectura, ingeniería, topografía, etc.

DEFINICIÓN: Los jóvenes estuvieron en contacto con la historia de la trigonometría. Identificaron que la trigonometría no se basa simplemente en realizar triángulos y hacer cálculos. Sino que posee un constructo conceptual de cientos de años, desarrollado con el aporte de diversas culturas y épocas de la historia hasta obtener las funciones trigonométricas y sus aplicaciones a diversas áreas de la ciencia moderna.

En la figura 5 se muestra una imagen de la presentación de Power Point "Historia, definición y campos de aplicación de la trigonometría". (ACT 1).

Figura 5. Imagen del archivo (act 1) "Historia, definición y campos de aplicación de la trigonometría".

Fuente: Autores

DEMOSTRACIÓN: En esta actividad los estudiantes todavía no realizan demostraciones.

Tabla 2. Resumen aspectos “Historia de la Trigonometría”

ACTIVIDAD	ASPECTOS POSITIVOS	ASPECTOS NEGATIVOS	ASPECTOS A MEJORAR
Historia de la trigonometría.	*Los estudiantes revisan la presentación en la plataforma. *Desarrollan el taller que consistía en preguntas acerca de la definición e importancia de la trigonometría.	*Dificultad en el ingreso a la plataforma. *A pesar de tener acceso a la presentación a algunos estudiantes les costaba redactar acerca de la importancia de la trigonometría.	Mejorar el acceso a la plataforma virtual 2 Unillanos.

4.2 ACTIVIDAD 2. REVISIÓN DE GUÍA “DEFINICIÓN Y CAMPOS DE APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA.

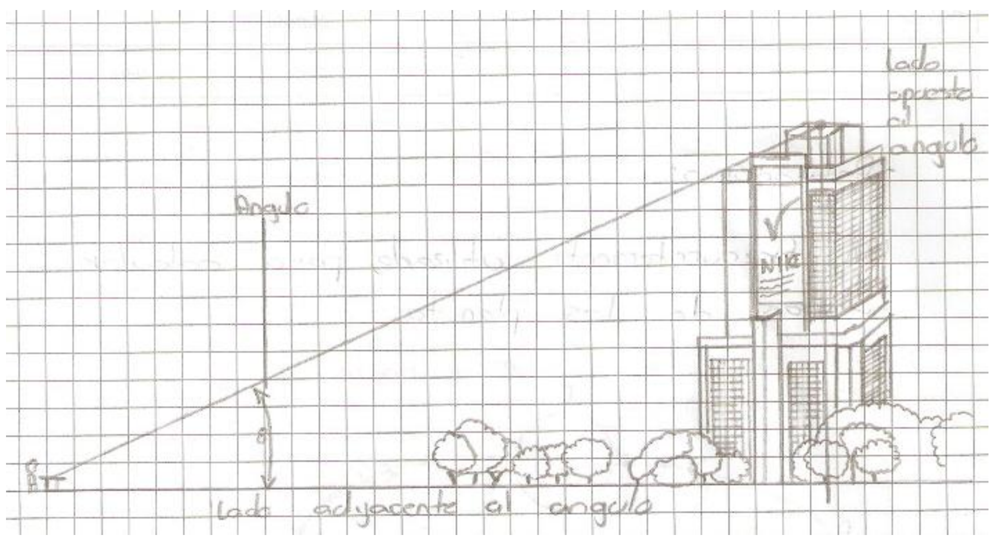
Con esta actividad se persiguen los siguientes objetivos: 1) Determinar los aportes de la trigonometría en diversas áreas del conocimiento. 2) Visualizar los elementos de la trigonometría que aplican para determinada disciplina. 3) Promover el desarrollo de los procesos de descripción, definición y demostración.

DESCRIPCIÓN: Los estudiantes revisan en la plataforma la guía “Aplicaciones de la trigonometría” (Ver anexo 2). En esta los jóvenes escriben y dibujan cuales son las aplicaciones de la trigonometría en cada área allí descrita, para ello se basan en sus experiencias y en la presentación “Historia, definición y campos de aplicación de la trigonometría” para redactar sus ideas.

DEFINICIÓN: En este proceso se evidencia la capacidad de los estudiantes para visualizar el campo de acción de la trigonometría dependiendo de cada disciplina y área del conocimiento. En física logran imaginar los diagramas de cuerpo libre con sus respectivas componentes x e y. En arquitectura logran visualizar las diferentes estructuras que se pueden formar y ven en ella reflejada la trigonometría a través de la identificación de triángulos rectángulos y como las mediciones de catetos y/o lados de triángulos facilitan la labor de los obreros. En ingeniería los estudiantes visualizan puentes, pendientes y construcción de acueductos, etc.

En la figura 6 se muestra un dibujo realizado por un estudiante acerca de las aplicaciones de la trigonometria. (ACT 2).

Figura 6. Aplicaciones de la trigonometría.



Fuente: estudiantes.

En conclusión los estudiantes conciben ideas partiendo de sus experiencias acerca de las aplicaciones de la trigonometría. Cabe destacar que antes de esta actividad los estudiantes no tenían muy claro que era la trigonometría. Aspecto que se mejoró partiendo de la actividad anterior sobre la Historia de la Trigonometría. A partir de esta los estudiantes identificaron las posibilidades que tiene la trigonometría de ocupar varios contextos de la vida cotidiana. Así pues los estudiantes con esta idea más clara lograron determinar las aplicaciones específicas de la trigonometría en cada disciplina.

DEMOSTRACIÓN: Con esta actividad los estudiantes todavía no realizan demostraciones.

Tabla 3. Resumen aspectos "definición y campos de aplicación de la trigonometría"

ACTIVIDAD	ASPECTOS POSITIVOS	ASPECTOS NEGATIVOS	ASPECTOS A MEJORAR
Revisión de guía "definición y campos de aplicación de la trigonometría	Los jóvenes logran visualizar varios aspectos de la trigonometría y sus aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento. Los jóvenes se basan en sus experiencias para determinar en qué puntos específicos de diferentes áreas la trigonometría tiene alguna aplicación. Por	Dificultades en conceptos como cartografía y topografía. Al no tener claros estos conceptos les costaba redactar claramente alguna aplicación de la trigonometría a alguna de estas áreas.	Aclaración de dichos conceptos con futuro a mejoras.

	ejemplo, En ingeniería la pendiente de un trayecto de acueducto.		

4.3 ACTIVIDAD 3. OBSERVACIÓN DEL VIDEO INTERACTIVO "COMO MIDIÓ EL RADIO DE LA TIERRA ERATÓSTENES".

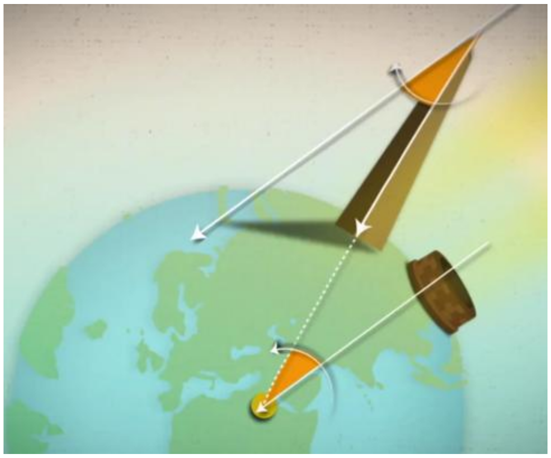
Con esta actividad se persiguen los siguientes objetivos: 1) Argumentar la importancia de la trigonometría en la solución de problemas en la antigüedad. 2) Determinar el proceso y análisis matemático y geométrico llevado a cabo por Eratóstenes. 3) Promover el desarrollo de los procesos de descripción, definición y demostración.

DESCRIPCIÓN: Los estudiantes observan el video: "Como Eratóstenes midió el radio de la Tierra" (Ver anexo 3). En este video los estudiantes identifican la aplicación de las razones trigonométricas en la antigüedad.

DEFINICIÓN: Los estudiantes determinan la importancia de la trigonometría desde épocas antiguas donde los únicos elementos de medición eran un gnomon y un scaphe; y las únicas herramientas matemáticas eran elementos y axiomas de la geometría plana.

En la figura 7. se muestra una imagen del analisis que realiza Eratostenes a traves de dos rectas paralelas y una recta secante para obtener el valor del ángulo, puesto que son alternos internos. (ACT 3).

Figura 7. Imagen tomada del video: "COMO MIDIÓ EL RADIO DE LA TIERRA ERATÓSTENES".



Fuente: video. https://www.youtube.com/watch?v=UeIQnjOEGUY

Desde este punto de vista los jóvenes valoran el esfuerzo de Eratóstenes al observar como un individuo puede lograr este tipo de cálculos sin el uso de alguna calculadora. Así los educandos evidencian la importancia de la trigonometría en el estudio de muchos ámbitos de la vida cotidiana. Cómo estos aportes de antiguos pensadores fomentaron la evolución de diversas áreas del conocimiento con sus ideas y descubrimientos.

DEMOSTRACIÓN: Mediante esta actividad, el análisis de rectas y ángulos son susceptibles de demostrar. Los estudiantes comprenden el axioma de ángulos alternos internos como herramienta para determinar el ángulo asociado a la altura de la torre y la proyección de su sombra.

Tabla 4. Resumen aspectos "cómo midió el radio de la tierra Eratóstenes"

ACTIVIDAD	ASPECTOS POSITIVOS	ASPECTOS NEGATIVOS	ASPECTOS A MEJORAR
Observación del video interactivo "cómo midió el radio de la tierra Eratóstenes".	Los estudiantes evidencian la importancia de la trigonometría desde épocas antiguas hasta hoy. Los estudiantes interiorizan de mejor manera los conceptos de manera interactiva. (radio, diámetro, perímetro y circunferencia)	Los estudiantes poseen carencias en pre conceptos de geometría plana como lo son ángulos alternos – internos, recta secante, rectas paralelas, diámetro y longitud de una circunferencia, entre otros. La conexión a internet, ya que el video se encontraba allí.	Mejorar conexiones y redes inalámbricas.

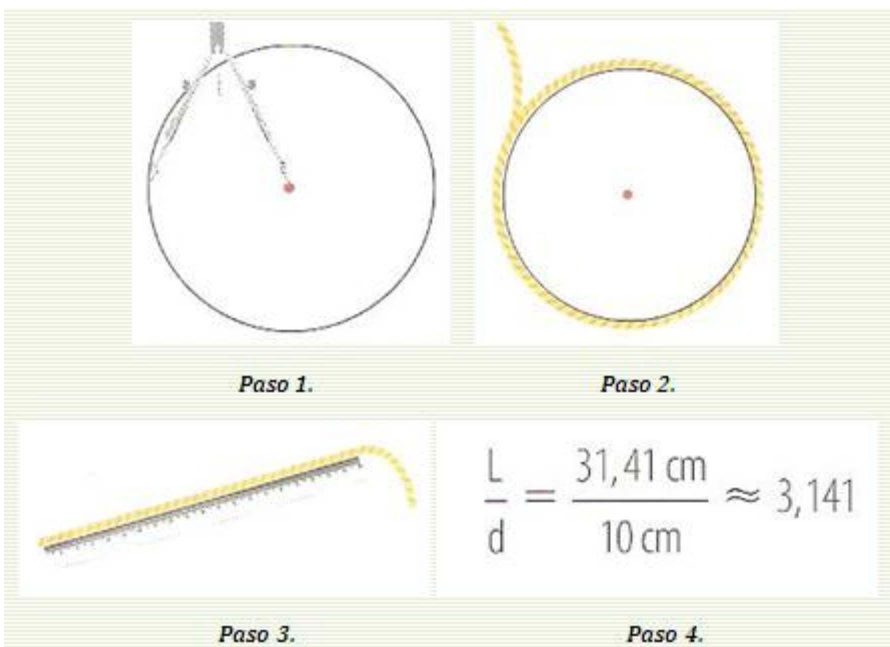
4.4 ACTIVIDAD 4. DESARROLLO DE LA GUÍA "CIRCUNFERENCIA Y SÓLO".

Con esta actividad se persiguen los siguientes objetivos: 1) hallar la razón existente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro llamada número pi (π). 2) Identificar los elementos de una circunferencia. 3) Realizar conversiones de grados a radianes y viceversa. 4) Promover el desarrollo de los procesos de descripción, definición y demostración.

Situación 1. Longitud de la circunferencia. En esta parte no se hace uso del software, los estudiantes deben hallar los elementos que se solicitan para medir la longitud de una circunferencia. Uno de los objetivos del problema planteado es crear la necesidad de aprender conceptos nuevos que les ayuden en la solución de estas situaciones. En este caso, el docente orienta a los estudiantes para que comprendan que las medidas encontradas mediante instrumentos de medición, como regla y compas no son exactas, y que cuando se usa el software a pesar de lograr precisión se requieren de justificaciones teóricas (Ver anexo 4).

En la figura 8 se muestra una imagen del analisis que realizan los estudiantes para hallar la razon entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. (ACT 4).

Figura 8. Imagen tomada del anexo (CIRCUNFERENCIA Y SÓLO, Pág. 9, act 4)



Fuente: Hipertexto Santillana. Matemáticas 9. Pág. 235

DESCRIPCIÓN: En esta actividad los estudiantes identifican los elementos geométricos como lo son el diámetro y longitud de la circunferencia.

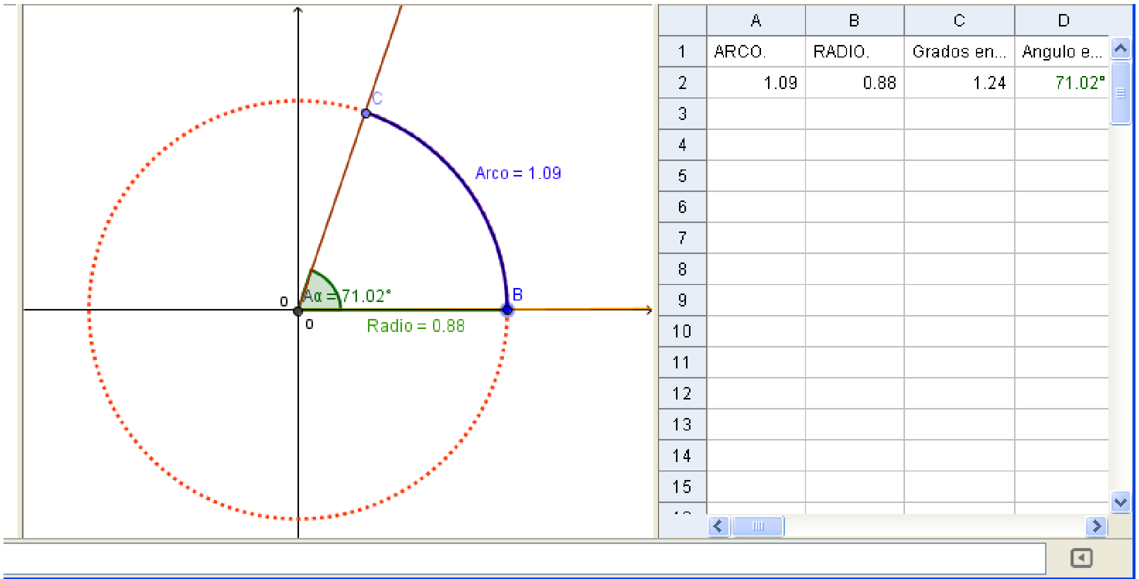
DEFINICIÓN: Los estudiantes no podrán encontrar la solución a los problemas planteados si no conocen el concepto de longitud y diámetro, o si a pesar de conocerlas no saben cómo utilizarlas. La necesidad de encontrar solución a los problemas planteados los llevará a buscar relaciones que les permitan plantear respuestas, en este caso, estas pueden darse mediante la utilización de la razón entre longitud de una circunferencia y su diámetro.

DEMOSTRACIÓN: Mediante esta actividad los estudiantes comprueban que se cumple la razón $\frac{L}{d} = \pi$, para diferentes radios y tamaños de circunferencias.

Situación 2. Conversión de grados a radianes y de radianes a grados con el programa Geogebra. Con esta actividad se pretende introducir a los estudiantes al sistema radial mediante la exploración de las medidas de ángulos. Los jóvenes identifican la relación existente entre los valores. Por ejemplo $2\pi\, rad = 360^o$ y a través de esta obtienen los demás valores de ángulos mediante una regla de tres simple.

En la figura 9 se muestra una imagen de la plantilla que trabajaran los estudiantes (ACT 4).

Figura 9. Imagen del archivo (act 4) "CONVERSIÓN DE GRADOS A RADIANES Y VICEVERSA".



Fuente: autores.

En el archivo mediante el arrastre del punto C, los estudiantes pueden visualizar la variación del ángulo $\sphericalangle BAC$.

A continuación se describe el proceso llevado a cabo con el problema 2:

DESCRIPCIÓN: Cada estudiante instala el programa Geogebra en sus computadores para realizar la respectiva actividad. Para esta actividad se construyó en el programa Geogebra una plantilla para que los estudiantes resolvieran los ejercicios (Ver anexo 4). Esta plantilla consiste en una circunferencia [36] donde los estudiantes pueden deslizar un punto sobre el borde de esta. A partir de esta variación del arco los alumnos identifican como a medida que va creciendo la representación del ángulo en forma sexagesimal también lo hace la representación en radianes. Este ejercicio se realiza con el fin de que los educandos comprendan la naturaleza de conversiones en el sistema radial y se

[36] Circunferencia con radio la unidad, normalmente con centro en el origen.

familiaricen con el número π (pi) y su importancia en el estudio de las funciones trigonométricas.

DEFINICIÓN: Mediante la utilización de la aplicación deslizador los estudiantes pudieron describir la variación del ángulo dado en grados y radianes. Identificaron que la longitud de arco depende explícitamente de la amplitud del ángulo y no de la longitud del radio.

El docente hace énfasis en que los estudiantes comprendan la relación existente entre los ángulos en grados y su conversión a radianes. Para ello, en la plantilla se utiliza el cuadro en Excel para que los jóvenes observen la equivalencia de cada uno, partiendo de la medida del ángulo.

DEMOSTRACIÓN: Los estudiantes explican y argumentan sus conjeturas y demostraciones sobre la conversión de grados a radianes. La dependencia de la longitud de arco por la amplitud del ángulo y sobre la relación existente entre radianes y grados.

Tabla 5. Resumen aspectos "Circunferencia y Círculo"

ACTIVIDAD	**ASPECTOS POSITIVOS**	**ASPECTOS NEGATIVOS**	**ASPECTOS A MEJORAR**
Desarrollo de la guía "circunferencia y círculo".	Los jóvenes comprueban los resultados obtenidos en el programa Geogebra con los de sus cálculos en el cuaderno. Los estudiantes	Los estudiantes presentaron dificultades en la comprensión de que el radian es la medida del arco que es igual a la distancia del radio, puesto que se cambia el	Realizar una actividad anterior a a la descrita. En esta actividad se debe hallar la longitud de una circunferencia utilizando los conceptos de radio, diámetro y

	logran comprender la conversión de grados a radianes y viceversa a través del método gráfico y el método analítico.	paradigma de línea recta del radio a una longitud de circunferencia llamada arco.	longitud de circunferencia para que los jóvenes conozcan la naturaleza del número π (pi)

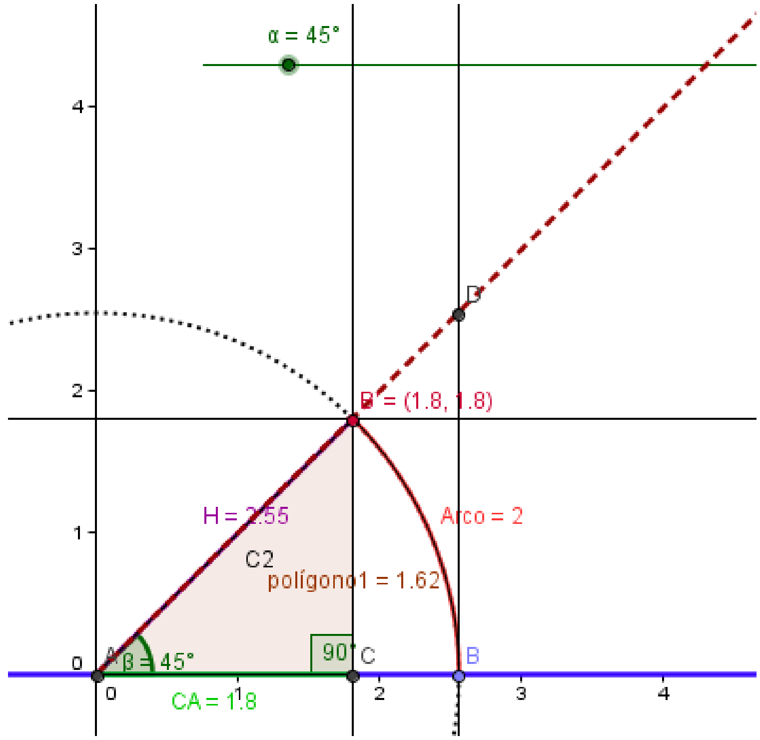
4.5 ACTIVIDAD 5. DESARROLLO DE LA GUÍA “RAZONES TRIGONOMÉTRICAS”

Con esta actividad se persiguen los siguientes objetivos: 1) Identificar las razones trigonométricas del triángulo rectángulo. 2) Reconocer que el valor de las razones trigonométricas de un triángulo depende de la amplitud de los ángulos del triángulo pero no depende de las longitudes de los lados. 3) Fomentar la reflexión y la discusión sobre conceptos básicos de las razones trigonométricas. 4) Promover el desarrollo de los procesos de descripción, definición y demostración.

Con esta actividad se pretende introducir a los estudiantes a las razones trigonométricas mediante la exploración de las medidas de los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Se espera que identifiquen la dependencia de las razones de los ángulos y los valores de variación de las razones.

En la figura 10 se muestra una imagen de la plantilla que trabajaran los estudiantes (ACT 5).

Figura 10 Imagen del archivo (act 5) “RAZONES TRIGONOMÉTRICAS”.



Fuente: autores.

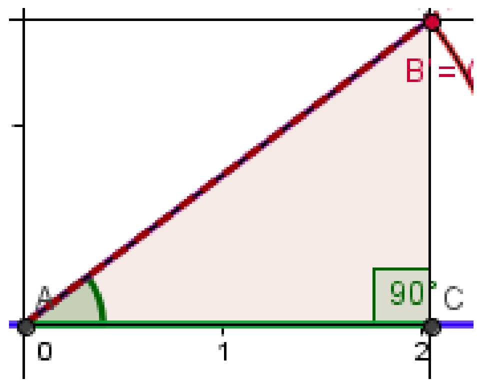
En el archivo mediante el arrastre del punto α, los estudiantes pueden visualizar la variación del ángulo $\sphericalangle BAC$, lados del triángulo y la variación de las razones trigonométricas. Con el arrastre del punto α, los estudiantes pueden visualizar la variación de los lados del triángulo y que los valores de los ángulos y de las razones permanecen invariantes, visualizan además, triángulos semejantes.

A continuación se describe cada proceso de la actividad 5:

DESCRIPCIÓN: Mediante la utilización del arrastre en la plantilla ACT 5 los estudiantes pueden describir la variación de las razones trigonométricas, de los ángulos, visualizan que las razones dependen de la amplitud de los ángulos del triángulo, pero no depende de las longitudes de sus lados. Así mismo pueden observar y describir que dos razones varían entre cero y uno; otras dos entre cero e infinito; y las otras dos entre uno e infinito (Ver anexo 5).

DEFINICIÓN: Los estudiantes reconocen las razones trigonométricas como cocientes entre los lados del triángulo rectángulo así: en el triángulo *ABC* se establecen las razones $\frac{AB}{BC}, \frac{AB}{AC}, \frac{BC}{AC}, \frac{BC}{AB}, \frac{AC}{AB}$ y $\frac{AC}{BC}$.

Figura 11. Imagen del archivo (act 5) "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS".



Fuente: autores.

DEMOSTRACIÓN: Mediante esta actividad, las variaciones de las razones y los valores entre los que varía cada una, serán susceptibles de demostrar, ya sea con ejemplos encontrados en la pantalla o mediante razonamientos matemáticos.

Tabla 6. Resumen aspectos "Razones Trigonométricas"

ACTIVIDAD	ASPECTOS POSITIVOS	ASPECTOS NEGATIVOS	ASPECTOS A MEJORAR
Desarrollo de la guía "Razones trigonométricas"	*Los estudiantes comprueban la naturaleza y el porqué de las razones trigonométricas. *Comprenden	Los estudiantes tienen problemas en el manejo de escalas. En algunos problemas se necesitaba manejar una	Realizar una breve introducción de algunos comandos básicos del programa Geogebra. Los

	que la distancia de los catetos a un punto de la circunferencia depende de la variación del ángulo. *Utilizan el programa Geogebra intentando dar solución a cada uno de los problemas planteando conjeturas para posibles soluciones.	escala para analizar en el programa Geogebra y así hallar el ángulo de inclinación. En vista de esto es necesario recordar a los estudiantes la ecuación de la pendiente, para que utilicen cualquier punto de recta y asi identifiquen el ángulo de inclinación. Algunos estudiantes que no han podido ingresar a la plataforma, se desvían del tema ingresando a las redes sociales.	estudiantes tienen la idea de cómo resolver los problemas e inclusive algunos realizan sus cálculos con lápiz, hoja y calculadora, pero les cuesta identificar esta solución en la plantilla elaborada en el programa.

4.6 ACTIVIDAD 6. CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SEN(X).

Con esta actividad se persiguen los siguientes objetivos: 1) Conocer las diferentes aplicaciones de la función sen(x). 2) Construir la función sen(x) en el software Geogebra. 3) Identificar los elementos que hacen posible la construcción de la función sen(x). 4) Determinar los elementos amplitud, periodo, fase y constante de fase partiendo de su gráfica. 5) Determinar las transformaciones de la función sen(x) partiendo de su estructura. 6) Fomentar la reflexión y la discusión sobre conceptos básicos de las funciones trigonométricas. 7) Promover el desarrollo de los procesos de descripción, definición y demostración.

Situación 1: Aplicaciones de la función sen(x). Con esta actividad se definen algunas aplicaciones de la función sen(x), haciendo énfasis en la importancia que tiene para la resolución de problemas, estudio de fenómenos, avances en tecnología y demás ciencias (Ver anexo 6).

A continuación se muestran los resultados obtenidos para este proceso.

DESCRIPCIÓN: En esta actividad los estudiantes describen las aplicaciones de la función sen(x). Una de estas aplicaciones describe como se evidencia la función sen(x) en el estudio de las ondas de radio. Para esto en el archivo (Función trigonométrica sen(x), anexo 6), se han dejado un par de direcciones de internet para que el educando busque la información allí. Así los jóvenes identifican rápidamente las aplicaciones de esta función.

DEFINICIÓN: Los estudiantes explican y argumentan sus conjeturas acerca de las aplicaciones de la función sen(x). La actividad permite a los jovenes compartir con sus compañeros los usos que le ha dado el hombre a la función sen(x).

DEMOSTRACIÓN: Con esta actividad los estudiantes todavía no realizan demostraciones.

Situación 2: Construcción de la función sen(x) en el programa Geogebra. En esta actividad se hace el uso del software Geogebra. A los estudiantes se les hace una introducción acerca de las herramientas que posee este software; para ello se realizó un paso a paso, donde pueden observar la secuencia para realizar la construcción de la función sen(x) (Ver anexo 6).

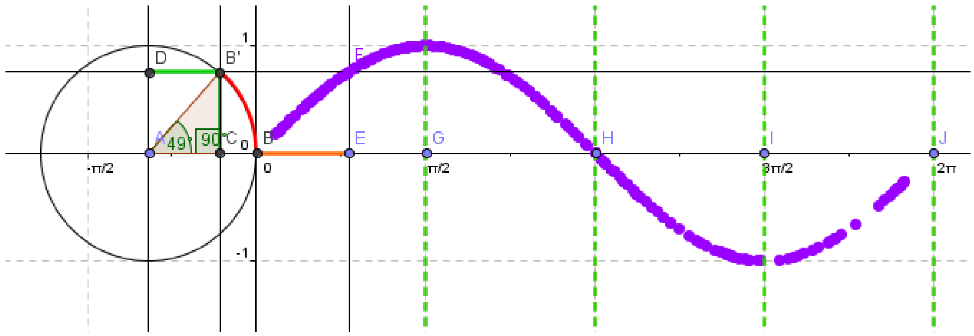
A continuación se muestran los resultados obtenidos para este proceso.

DESCRIPCIÓN: Describen los elementos geométricos presentes en la construcción. Describen los variantes e invariantes geométricos y numéricos. Describen la variación de los valores y los signos de la función sen(x) para diferentes ángulos. Describen el cambio de los valores y signos de la función, basados en las fluctuaciones que esta tiene a medida que el cateto opuesto al ángulo varía desde un punto máximo en 1 a un punto mínimo en -1.

DEFINICIÓN: En esta actividad los estudiantes evidencian los elementos que hacen posible la construcción de la función sen(x). Mediante esta actividad los jóvenes aplicaron los conceptos previos acerca de las razones trigonométricas y como a partir de estas se construyen las funciones trigonométricas.

DEMOSTRACIÓN: Los estudiantes deben demostrar la relación existente entre la variación del ángulo barrido y la longitud del arco de circunferencia. A partir de la deducción formal explican cómo se forma la función sen(x) partiendo de la variación de la longitud del cateto opuesto y la proyección de la longitud del arco en el eje de las x, en este caso puntos en radianes.

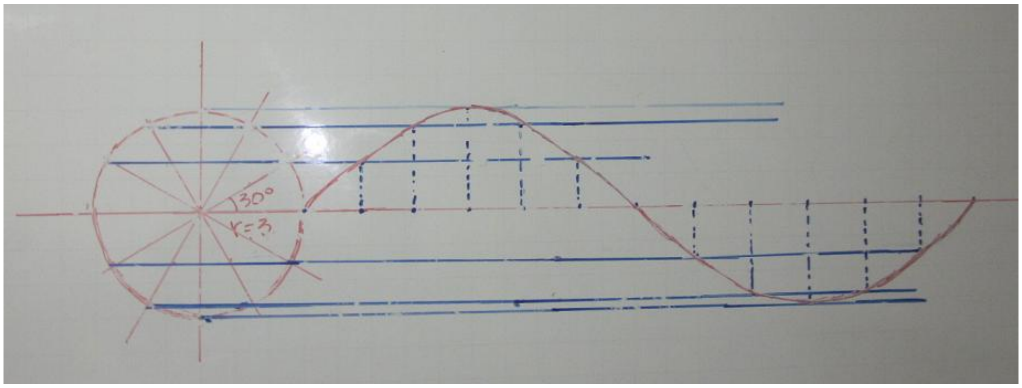
Figura 12. Imagen tomada del anexo (FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA SEN(X), Pág. 9, act 2) "CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN SEN(X) EN EL PROGRAMA GEOGEBRA".



Fuente: autores

Situación 2.1. Construcción de la función sen(x) en papel milimetrado. En esta actividad no se hace el uso del software Geogebra. A los estudiantes se les hace una introducción acerca de las herramientas a utilizar para realizar la gráfica de la función sen(x) (transportador, compas, y papel milimetrado); para ello el docente realiza el gráfico en el tablero explicando a los estudiantes los pasos a seguir.

Figura 13 “CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN SEN(X) EN EL TABLERO”.

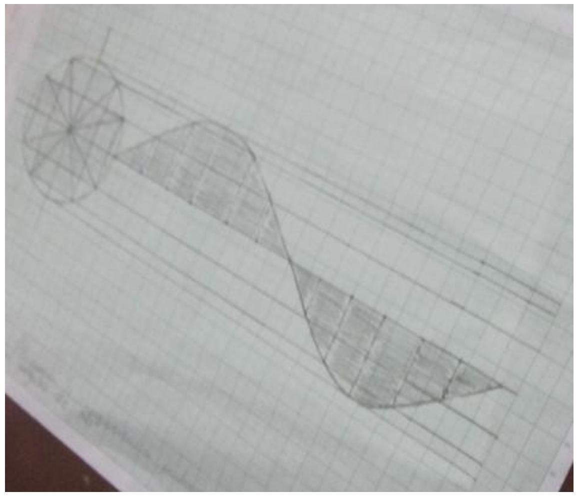


Fuente: autores.

DESCRIPCIÓN: El propósito de esté problema consistía en construir la función trigonométrica sen(x). La construcción se realiza por medio de papel milimetrado, regla, transportador y cordón. Para lograr esta reproducción el docente realiza la gráfica en el tablero. Explica los pasos a seguir a medida que los estudiantes van realizando la reproducción, para ello se construye la gráfica partiendo de una recta horizontal y una circunferencia en un extremo del tablero. Posteriormente se realiza la división de la circunferencia en ángulos de medida 30^o. Se trazan rectas horizontales a cada uno de los puntos de la circunferencia donde se marcaron los ángulos. Teniendo este constructo gráfico ahora sólo faltaba graficar la función. Se utiliza el cordón para medir el arco de circunferencia de cada ángulo. Luego se estira el cordón en forma de línea recta y se ubica el punto correspondiente a cada ángulo con su paralela. Para finalizar se unen los puntos y se obtiene la función sen(x).

DEFINICIÓN: La actividad permite que los estudiantes argumenten y expliquen el proceso para construir la función sen(x). A partir de esto los estudiantes identifican los elementos que hacen posible esta construcción. Observan como el cateto opuesto varía dependiendo de la abertura del ángulo. Evidencian la relación existente entre el ángulo, cateto opuesto y la longitud de arco. Observan que la longitud del cateto opuesto determina la sucesión de puntos en el eje y (amplitud) y la proyección del arco como la longitud de corrimiento de la función en el eje x.

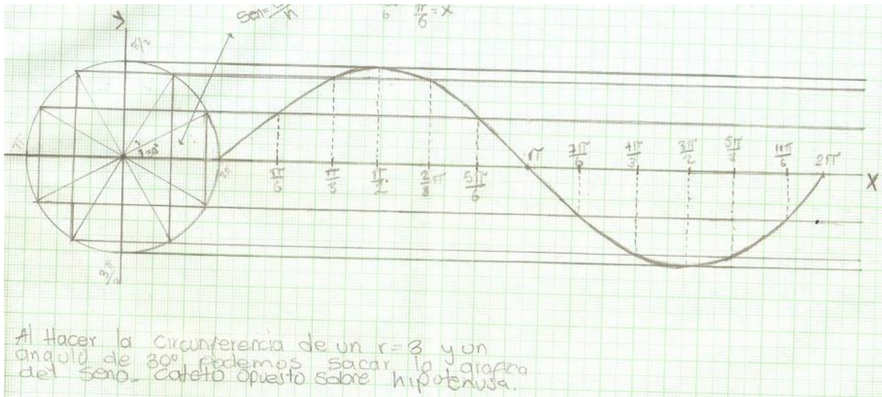
Figura 14. Construcción de la función sen(x).



Fuente: estudiantes.

DEMOSTRACIÓN: Los estudiantes explican y argumentan sus conjeturas y demostraciones sobre las variaciones del cateto opuesto cuando varía el ángulo. Comprueban la relación existente entre el arco, ángulo y radio, por medio de la ecuación $s = \theta r$. Con esta ecuación determinan más precisamente la longitud de arco a diferencia del método del cordón. Pero para lograr este manejo de ecuación hacen uso de sus preconceptos acerca de la conversión de grados a radianes, para así determinar la longitud de arco de la circunferencia respectiva al ángulo.

Figura 15. Construcción de la función sen(x) con sus respectivos radianes.



Fuente: estudiantes.

A continuación, presentamos los aspectos positivos, negativos y a mejorar en la actividad.

Tabla 7. Resumen aspectos "construcción de la gráfica de la función sen(x)"

ACTIVIDAD	**ASPECTOS POSITIVOS**	**ASPECTOS NEGATIVOS**	**ASPECTOS A MEJORAR**
Construcción de la gráfica de la función Sen(x).	*Los estudiantes logran realizar la gráfica de la función sen(x). *Comprueban que al unir los puntos de cada segmento de arco en las paralelas al eje de las x se forma una curva llamada función	*Los estudiantes presentaron dificultades en el manejo de la longitud de arco al desplazarla a las rectas paralelas al eje x. *Poseían dificultades para comprender que	*Realizar una breve introducción de la ecuación del arco $s = \theta r$. Esto con el fin de que los jóvenes identifiquen que esta longitud está asociada con la construcción de la función sen(x)

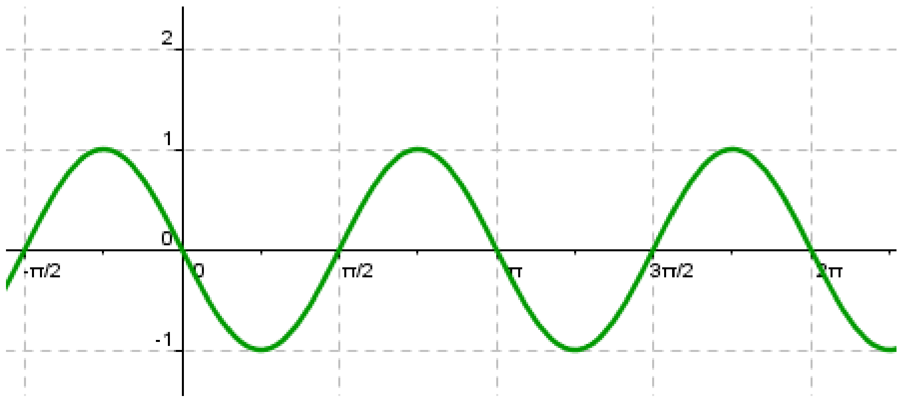
	sen(x). *Los jóvenes se motivan al trabajar de forma práctica. Manipulan los elementos para construir las gráficas y constantemente participan, realizando preguntas ante las dudas que presentaban.	esta longitud de arco que se trasladaba a las rectas paralelas tiene también un valor en radianes.	sobre el eje x.

Situación 3. Elementos de la función sen(x). En esta actividad se hace uso del software Geogebra para determinar los elementos de la función sen(x). Para esto se creó un archivo (Ver anexo 6), donde los estudiantes encontraran cuatro gráficas diferentes. En estas gráficas determinaran los elementos que pertenecen a cada una de ellas. Estos elementos son amplitud, periodo, fase y constante de fase.

DESCRIPCIÓN: Describen los elementos geométricos presentes en las funciones: comprensión y alargamiento, amplitud, periodo y desfase o desplazamiento de fase. Describen los variantes e invariantes geométricos y numéricos.

DEFINICIÓN: La actividad permite que los estudiantes asocien formas y realicen conjeturas. Por ejemplo; en la función $F(x) = sen(2x + \pi)$ determinan que al sumar la constante de fase π a la función original $F(x) = sen(2x)$ la gráfica de la función se corre una distancia de $\frac{\pi}{2}$ hacia la derecha, por ende la gráfica de la función $F(x) = sen(2x + \pi)$ en el punto 0 tiene como imagen -1.

Figura 16. Gráfica de la función $\boldsymbol{F(x) = sen(2x + \pi)}$ en el programa Geogebra.



Fuente: gráfica de función sen(x) realizada en el programa Geogebra por un estudiante.

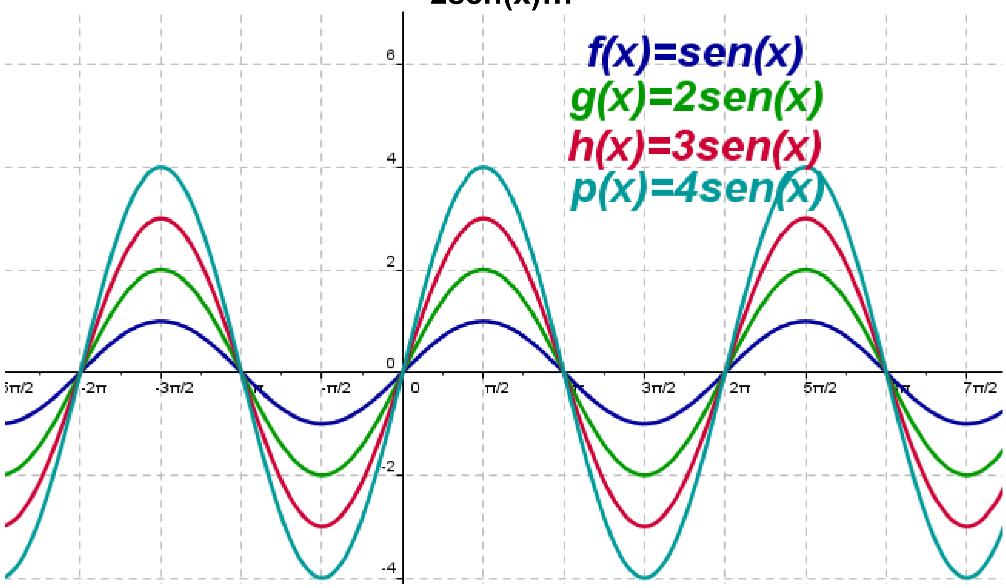
DEMOSTRACIÓN: Usan argumentos teóricos que les permiten encontrar relaciones entre los diferentes conceptos (periodo, amplitud, fase y constante de fase) y las gráficas de funciones.

Situación 4. Gráficas de la función sen(x). En esta actividad se hace uso de Geogebra para determinar cómo varia la función sen(x) dependiendo de su estructura (Ver anexo 6). Los estudiantes identificaran que elementos hacen posible que la función varíe de determinada forma, entre estos la amplitud, periodo, fase, constante de fase, comprensión y alargamiento.

DESCRIPCIÓN: Esta actividad consiste en que los estudiantes organizados en grupos grafiquen unas funciones e identifiquen sus elementos y sus variaciones con respecto a otras. Los educandos realizan las gráficas en el software Geogebra y pasan a explicarles a sus demás compañeros de clase como se comportaban el grupo de funciones que les correspondía graficar. A su vez los demás grupos realizan este trabajo con grupos de funciones diferentes y pasan a socializar. Describen los elementos geométricos presentes en las funciones: comprensión y alargamiento, amplitud, periodo y desfase o desplazamiento de fase. Describen los variantes e invariantes geométricos y numéricos.

DEFINICIÓN: La actividad permite que los estudiantes observen como varían las funciones partiendo de su estructura. Por ejemplo, si aumenta o disminuye la amplitud de determinada función.

Figura 17. Tomado del anexo (FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA SEN(X), Pág. 14) Variación de funciones por medio del programa Geogebra sen(x), 2sen(x)…

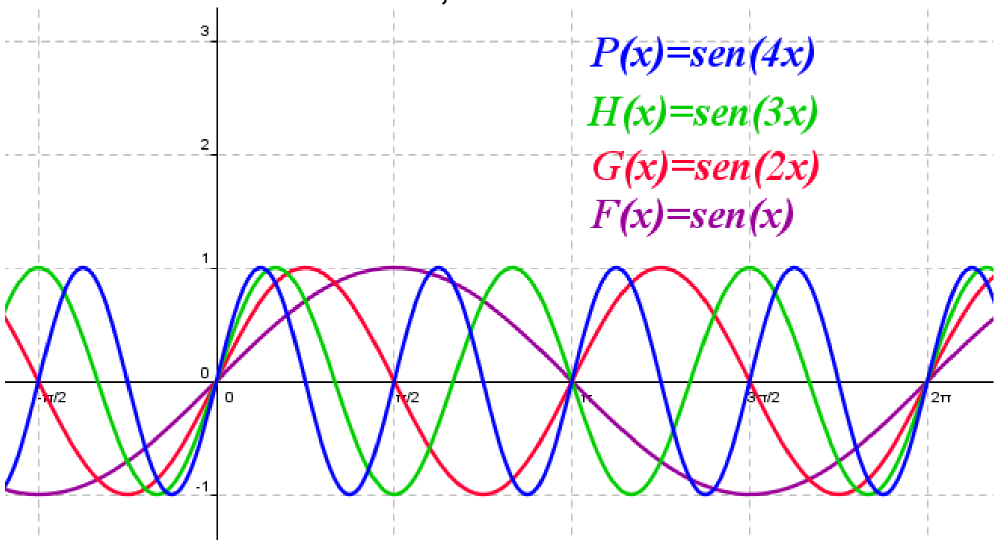


Fuente: autores.

Los estudiantes observan que al incrementar o disminuir el valor de la amplitud la función varia respecto al eje y.

Por ejemplo, al multiplicar una constante a la fase (x), el periodo de la función varía. Si esta constante es mayor que 1 la función sen(x) se comprimiría disminuyendo su periodo y cuando esta constante es mayor que cero y menor que 1, la función sen(x) se alargaría aumentando su periodo.

Figura 18. Tomado del anexo (FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA SEN(X), Pág. 14) Variación de funciones por medio del programa Geogebra: sen x, sen 2x, sen 3x…



Fuente: autores.

Para la función $y = sen\ (2x)$ el periodo es el siguiente $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Porque $T = 2\,\pi$, entonces al dividir 2π entre el coeficiente de "x", entonces:

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

DEMOSTRACIÓN: Encuentran y demuestran que la función sen(x) tiene infinitas posibilidades. La función sen(x) depende de muchas variantes e invariantes y cada uno de los elementos que la componen altera la estructura de la misma. Los estudiantes logran identificar en que aspecto cambia una función si se varía determinado elemento.

4.7 ACTIVIDAD 7. CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COS(X).

Con esta actividad se persiguen los siguientes objetivos: 1) Conocer las diferentes aplicaciones de la función cos(x). 2) Construir la función cos(x) en el software

Geogebra. 3) Identificar los elementos que hacen posible la construcción de la función cos(x). 4) Determinar los elementos amplitud, periodo, fase y constante de fase partiendo de su gráfica. 5) Determinar las transformaciones de la función cos(x) partiendo de su estructura. 6) Fomentar la reflexión y la discusión sobre conceptos básicos de las funciones trigonométricas. 7) Promover el desarrollo de los procesos de descripción, definición y demostración.

Situación 1: Aplicaciones de la función cos(x). Con esta actividad se definen algunas aplicaciones de la función cos(x), haciendo énfasis en la importancia que tiene para la resolución de problemas, estudio de fenómenos, avances en tecnología y demás ciencias (Ver anexo 7).

A continuación se muestran los resultados obtenidos para este proceso.

DESCRIPCIÓN: En esta actividad los estudiantes describen las aplicaciones de la función cos(x). Una de estas aplicaciones describe como se evidencia la función cos(x) en el estudio del movimiento armónico simple. Para esto en el archivo (Función trigonométrica cos(x), anexo 7), se han dejado un par de direcciones de internet para que el joven busque la información allí. Así los educandos identifican rápidamente las aplicaciones de esta función.

DEFINICIÓN: Los estudiantes explican y argumentan sus conjeturas acerca de las aplicaciones de la función cos(x). La actividad permite la interacción y el debate entre los alumnos sobre los usos que le ha dado el hombre a esta función.

DEMOSTRACIÓN: En esta actividad todavía no se realizan demostraciones.

Situación 2: Construcción de la función cos(x) en el programa Geogebra. En esta actividad se hace el uso del software Geogebra. Se hace una introducción acerca de las herramientas que posee este software; para ello se realizó un paso a paso donde se pudo observar la secuencia para realizar la construcción de la función cos(x) (Ver anexo 7).

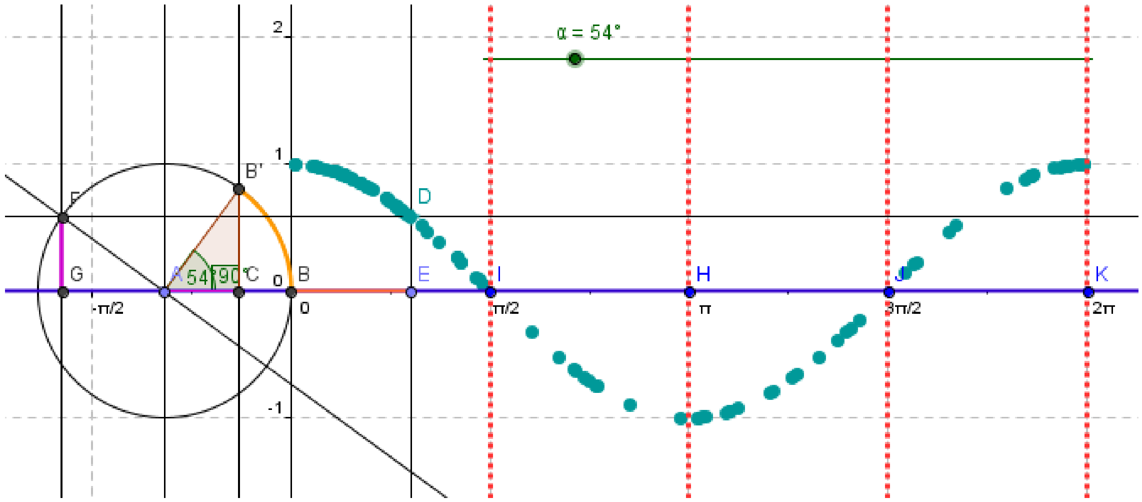
A continuación se muestran los resultados obtenidos para este proceso.

DESCRIPCIÓN: Describen los elementos geométricos presentes en la construcción. Describen los variantes e invariantes geométricos y numéricos. Describen la variación de los valores y los signos de la función cos(x) para diferentes ángulos. Describen el cambio de los valores y signos de la función, basados en las fluctuaciones que esta tiene a medida que el cateto adyacente al ángulo varía desde un punto máximo en 1 a un punto mínimo en -1.

DEFINICIÓN: En esta actividad los estudiantes evidencian los elementos que hacen posible la construcción de la función cos(x). Mediante esta actividad los jóvenes aplicaron los conceptos previos acerca de las razones trigonométricas y como a partir de estas se construyen las funciones trigonométricas.

DEMOSTRACIÓN: Los estudiantes deben demostrar la relación existente entre la variación del ángulo barrido y la longitud del arco de circunferencia. A partir de la deducción formal explican cómo se forma la función cos(x) partiendo de la variación de la longitud del cateto adyacente y la proyección de la longitud del arco en el eje de las x, en este caso puntos en radianes.

Figura 19. Imagen tomada del anexo (FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA COS(X), Pág. 11, act 2) "CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN COS(X) EN EL PROGRAMA GEOGEBRA".



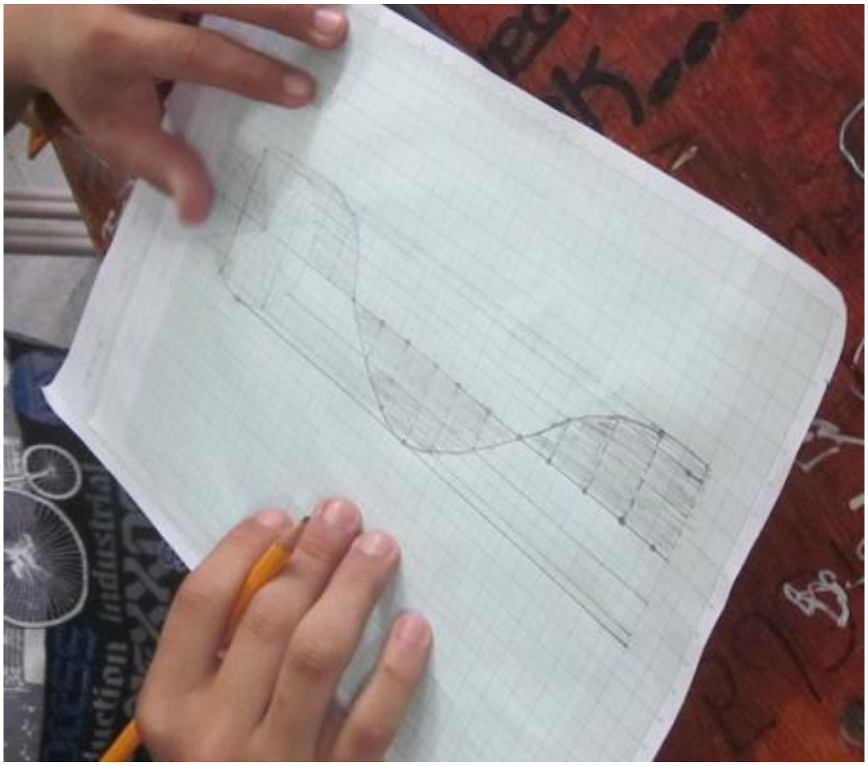
Fuente: autores.

Situación 2.1. Construcción de la función cos(x) en papel milimetrado. En esta actividad no se hace el uso del software Geogebra. A los estudiantes se les hace una introducción acerca de las herramientas a utilizar para realizar la gráfica de la función sen(x) (transportador, compas, y papel milimetrado; para ello el docente realiza el gráfico en el tablero explicando a los estudiantes los pasos a seguir.

DESCRIPCIÓN: El propósito de esta actividad consistía en construir la función trigonométrica cos(x). Para la construcción de esta función se realiza el mismo procedimiento que para la función sen(x). La diferencia consiste en que la función cos(x) no inicia en el punto cero (0,0). En este caso la función inicia en el punto (0,1). En este punto es donde los estudiantes tuvieron su mayor confusión, puesto que no comprendían el por qué la función iniciaba en este punto.

DEFINICIÓN: La actividad permite que los estudiantes argumenten y expliquen el proceso para construir la función cos(x). A partir de esto los estudiantes identifican los elementos que hacen posible esta construcción. Observan como el cateto adyacente varía dependiendo de la abertura del ángulo. Evidencian la relación existente entre el ángulo, cateto adyacente y la longitud de arco. Observan que la longitud del cateto adyacente determina la sucesión de puntos en el eje y (amplitud) y la proyección del arco como la longitud de corrimiento de la función en el eje x.

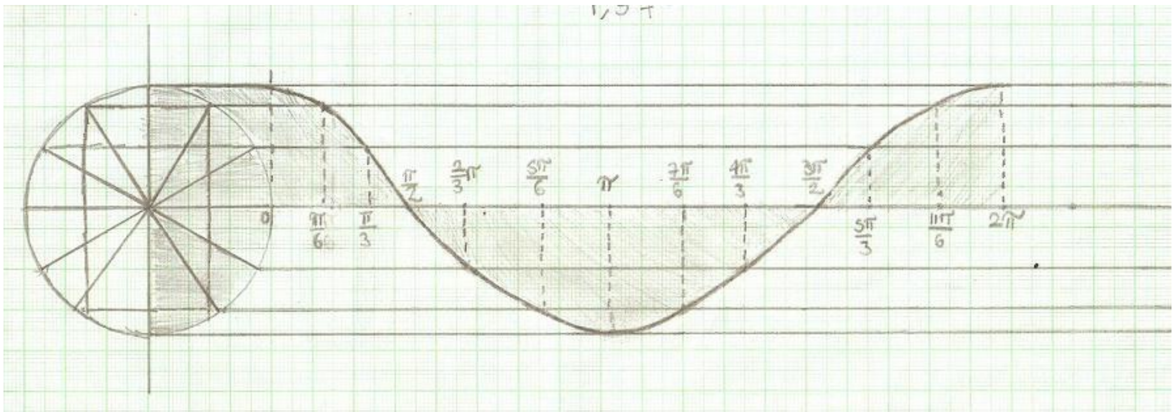
Figura 20. Construcción de la función cos(x).



Fuente: estudiantes.

DEMOSTRACIÓN: Los estudiantes explican y argumentan sus conjeturas y demostraciones sobre las variaciones del cateto adyacente cuando varía el ángulo. Comprueban la relación existente entre el arco, ángulo y radio, por medio de la ecuación $s = \theta r$. Con esta ecuación los estudiantes determinan más precisamente la longitud de arco a diferencia del método del cordón. Pero para lograr este manejo de ecuación los estudiantes hacen uso de sus preconceptos acerca de la conversión de grados a radianes, para así determinar la longitud de arco de la circunferencia respectiva al ángulo.

Figura 21. Construcción de la función cos(x) con sus respectivos radianes.



Fuente: estudiantes.

Tabla 8. Resumen aspectos “construcción de la gráfica de la función Cos(x)”

ACTIVIDAD	ASPECTOS POSITIVOS	ASPECTOS NEGATIVOS	ASPECTOS A MEJORAR
Construcción de la gráfica de la función Cos(x).	*Los estudiantes logran realizar la gráfica de la función cos(x). *Comprueban que al unir los puntos de cada segmento de arco en las paralelas al eje de las x se forma una curva llamada función cos(x).	*Los estudiantes presentaron dificultades en el momento de empezar a construir la función cos(x). No recordaban que en el punto (1,0) la longitud del cateto adyacente que describe la razón cos(x) vale uno (1); la cual se	*Realizar una breve introducción de la razón trigonométrica cos(x). Para que los estudiantes identifiquen la medida de este en la construcción de su función.

	*Los jóvenes se motivan al trabajar de forma práctica. Manipulan los elementos para construir las gráficas y constantemente participan, realizando preguntas ante las dudas que presentaban.	traslada al eje vertical para iniciar a construir la función desde el punto (0,1).	

Situación 3. Elementos de la función cos(x). En esta actividad se hace uso del software Geogebra para determinar los elementos de la función cos(x). Para esto se creó un archivo (Ver anexo 7), donde los estudiantes encontraran cuatro gráficas diferentes. En estas gráficas determinaran los elementos que pertenecen a cada una de ellas. Estos elementos son amplitud, periodo, fase y constante de fase.

DESCRIPCIÓN: Describen los elementos geométricos presentes en las funciones: comprensión y alargamiento, amplitud, periodo y desfase o desplazamiento de fase. Describen los variantes e invariantes geométricos y numéricos.

DEFINICIÓN: La actividad permite que los estudiantes asocien formas y realicen conjeturas. Por ejemplo; en la función $F(x) = 1 + cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ determinan que al remplazar $x = -\frac{\pi}{4}$, el resultado es:

$$F(x) = 1 + \cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{Remplazo } x = -\frac{\pi}{4}$$

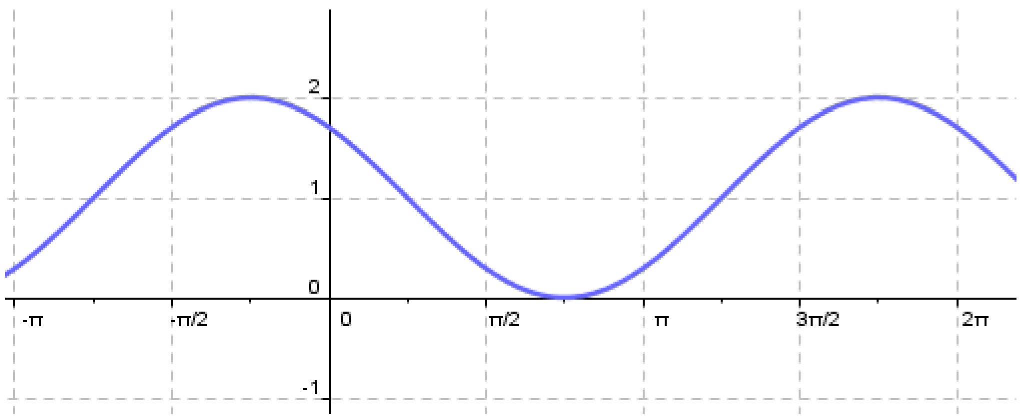
$$F(x) = 1 + \cos(0) \quad \text{el argumento de la función es igual a } 0$$

$$F(x) = 1 + 1 \quad \text{El } \cos(0) = 1$$

$$F(x) = 2 \text{ por ende cuando } x = -\frac{\pi}{4} \text{ la función toma un valor de } 2.$$

Una vez obteniendo este punto como referencia los jóvenes continúan remplazando valores y construyendo asi la gráfica de esta función; determinando los elementos que la componen.

Figura 22. Gráfica de la función cos(x) $F(x) = 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en el programa Geogebra.



Fuente: gráfica de función cos(x) realizada en el programa Geogebra por parte de un estudiante.

DEMOSTRACIÓN: Usan argumentos teóricos que les permiten encontrar relaciones entre los diferentes conceptos (periodo, amplitud, fase y constante de fase) y las gráficas de funciones.

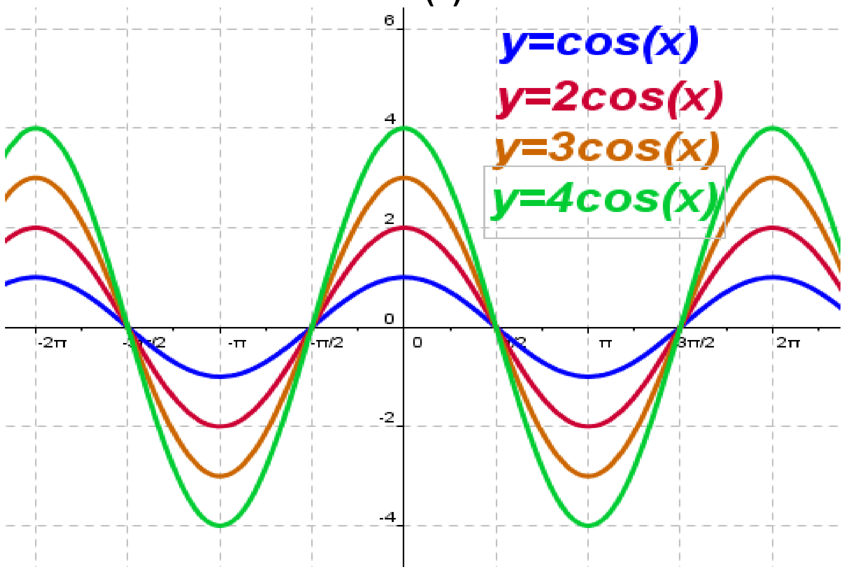
Situación 4. Gráficas de función cos(x). En esta actividad se hace uso del software Geogebra para determinar cómo varía la función cos(x) (Ver anexo 7).

Los estudiantes identificaran que elementos hacen posible que la función varíe de determinada forma, entre estos la amplitud, periodo, fase, constante de fase, comprensión y alargamiento.

DESCRIPCIÓN: Esta actividad se conforman grupos y proceden a graficar un grupo de funciones e identifiquen sus elementos y sus variaciones con respecto a otras aplicaciones. Se realizan las gráficas en el software Geogebra y se procede a socializar como se comportaban el grupo de funciones que les correspondía graficar. A su vez los demás grupos realizan este trabajo con funciones diferentes y pasan a exponer a sus compañeros. Describen los elementos geométricos presentes en las funciones: comprensión y alargamiento, amplitud, periodo y desfase o desplazamiento de fase. Describen los variantes e invariantes geométricos y numéricos.

DEFINICIÓN: La actividad permite que los estudiantes observen como varían las funciones partiendo de su estructura. Por ejemplo, si aumenta o disminuye la amplitud de determinada función.

Figura 23. Tomado del anexo (FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA COS(X), Pág. 16) Variación de funciones por medio del programa Geogebra cos(x), 2cos(x)…

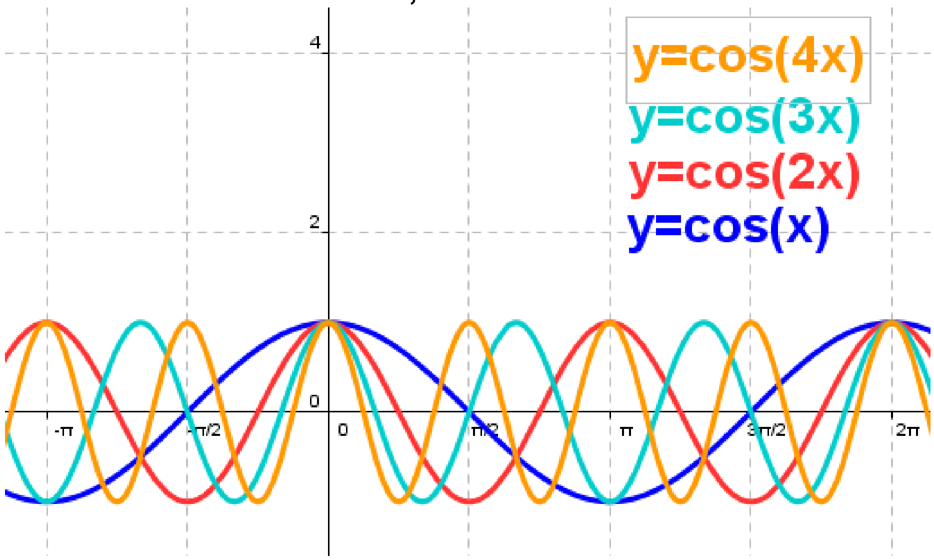


Fuente: autores.

Los estudiantes observan que al incrementar o disminuir el valor de la amplitud la función varia respecto al eje y.

Por ejemplo, al multiplicar una constante a la fase (x), el periodo de la función varía. Si esta constante es mayor que 1 la función cos(x) se comprimiría disminuyendo su periodo y cuando esta constante es mayor que cero y menor que 1, la función cos(x) se alargaría aumentando su periodo.

Figura 24. Tomado del anexo (FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA COS(X), Pág. 15) Variación de funciones por medio del programa Geogebra: cos x, cos 2x, cos 3x…



Fuente: autores.

Para la función $y = cos\,(2x)$ el periodo es el siguiente $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Porque $T = 2\,\pi$, entonces al dividir 2π entre el coeficiente de "x", entonces:

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

DEMOSTRACIÓN: Encuentran y demuestran que la función cos(x) tiene infinitas posibilidades. La función cos(x) depende de muchas variantes e invariantes y cada uno de los elementos que la componen altera la estructura de la misma. Los estudiantes logran identificar en que aspecto cambia una función si se varía determinado elemento.

4.8 ACTIVIDAD 8. CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN TAN(X).

Con esta actividad se persiguen los siguientes objetivos: 1) Conocer las diferentes aplicaciones de la función tan(x). 2) Construir la función tan(x) en el software Geogebra. 3) Identificar los elementos que hacen posible la construcción de la función tan(x). 4) Determinar los elementos amplitud, periodo, fase y constante de fase partiendo de su gráfica. 5) Determinar las transformaciones de la función tan(x) partiendo de su estructura. 6) Fomentar la reflexión y la discusión sobre conceptos básicos de las funciones trigonométricas. 7) Promover el desarrollo de los procesos de descripción, definición y demostración.

Situación 1: Aplicaciones de la función tan(x). Con esta actividad se definen algunas aplicaciones de la función tan(x), haciendo énfasis en la importancia que tiene para la resolución de problemas, estudio de fenómenos, avances en tecnología y demás ciencias (Ver anexo 8).

A continuación se muestran los resultados obtenidos para este proceso.

DESCRIPCIÓN: En esta actividad los estudiantes describen las aplicaciones de la función tan(x). Para esto en el archivo (Función trigonométrica tan(x), pág. 2), se han dejado una dirección de internet para que el estudiante busque la información allí. Así los estudiantes identifican rápidamente las aplicaciones de esta función.

DEFINICIÓN: Los estudiantes explican y argumentan sus conjeturas acerca de las aplicaciones de la función tan(x). La actividad permite a los estudiantes compartir con sus compañeros los usos que le ha dado el hombre a esta función.

DEMOSTRACIÓN: Con esta actividad los estudiantes todavía no realizan demostraciones.

Situación 2: Construcción de la función tan(x) en el programa Geogebra. En esta actividad se hace el uso del software Geogebra. A los estudiantes se les hace una introducción acerca de las herramientas que posee este software; para ello se realizó un paso a paso, donde los estudiantes pueden observar la secuencia para realizar la construcción de la función tan(x) (Ver anexo 8).

A continuación se muestran los resultados obtenidos para este proceso.

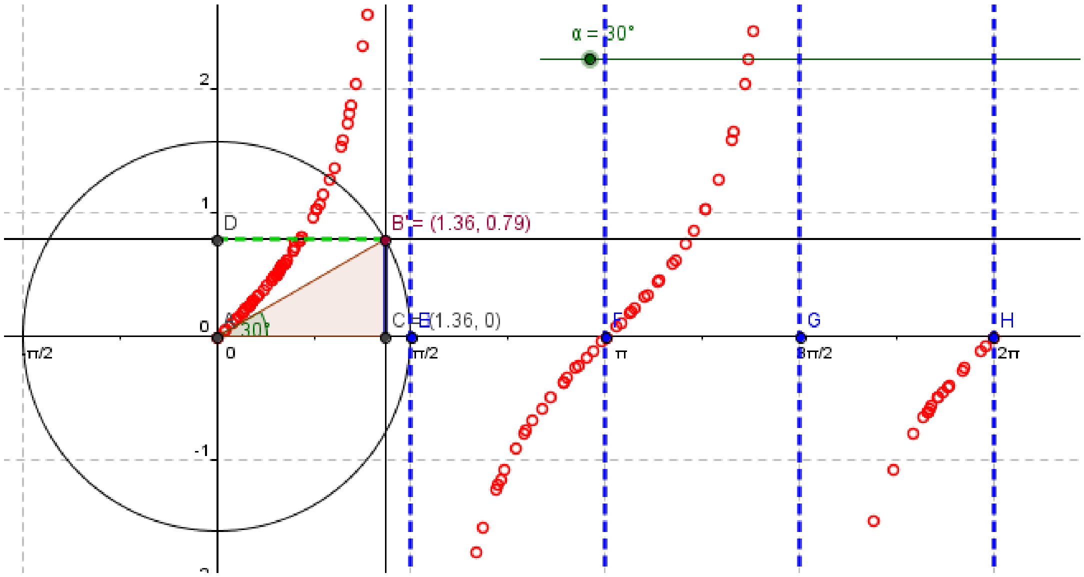
DESCRIPCIÓN: Describen los elementos geométricos presentes en la construcción. Describen los variantes e invariantes geométricos y numéricos.

Describen la variación de los valores y los signos de la función tan(x) para diferentes ángulos. Describen el cambio de los valores y signos de la función, basados en la proyección de la longitud de la hipotenusa que interseca la recta tan(x) a la circunferencia.

DEFINICIÓN: En esta actividad los estudiantes evidencian los elementos que hacen posible la construcción de la función tan(x). Mediante esta actividad los jóvenes aplicaron los conceptos previos acerca de las razones trigonométricas y como a partir de estas se construyen las funciones trigonométricas.

DEMOSTRACIÓN: Los estudiantes deben demostrar la relación existente entre la variación del ángulo barrido y la proyección de la hipotenusa a la recta tan(x). A partir de la deducción formal explican cómo se forma la función tan(x). Los jóvenes nuevamente hacen uso de la conversión de grados a radianes para determinar el valor correspondiente de determinado ángulo en radianes y su imagen en el eje y. Resuelto esto los alumnos argumentan que la función $y = tan\,x$, tiene asíntotas verticales en los valores de x, donde la función no está definida, es decir, para $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ en general, las rectas $x = \frac{n\pi}{2}$ con n entero impar son asíntotas verticales para la función $y = tan\,x$.

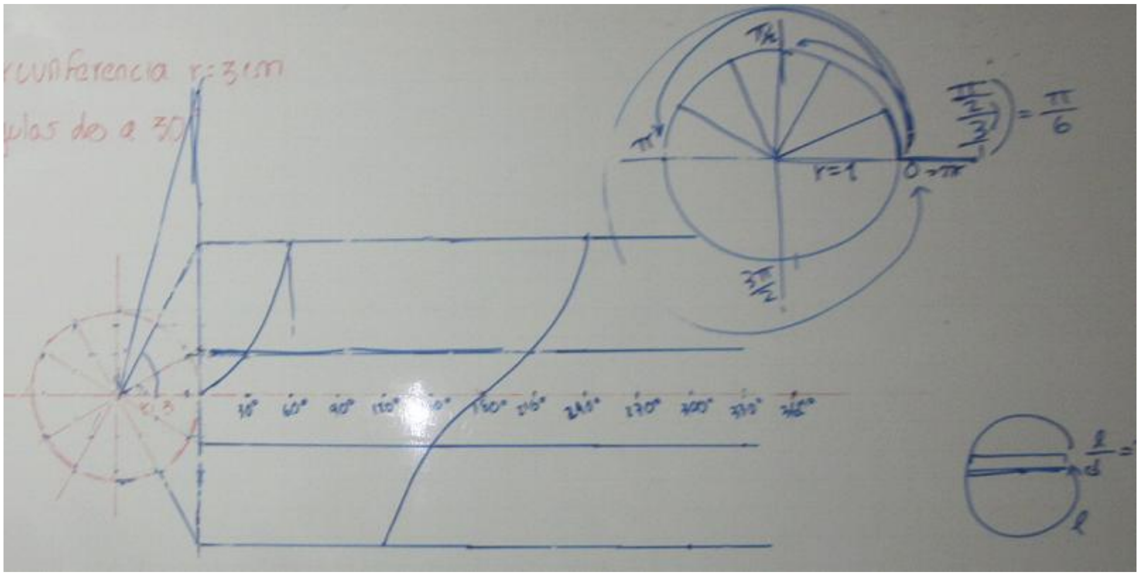
Figura 25. Imagen tomada del anexo (FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA TAN(X), Pág. 8, act 2) "CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN TAN(X) EN EL PROGRAMA GEOGEBRA".



Fuente: autores.

Situación 2.1. Construcción de la función tan(x) en papel milimetrado. En esta actividad no se hace uso del software Geogebra. A los estudiantes se les hace una introducción acerca de las herramientas a utilizar para realizar la gráfica de la función tan(x) (transportador, compas, y papel milimetrado); para ello el docente realiza el gráfico en el tablero explicando a los estudiantes los pasos a seguir.

Figura 26. “CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN TAN(X) EN EL TABLERO”.

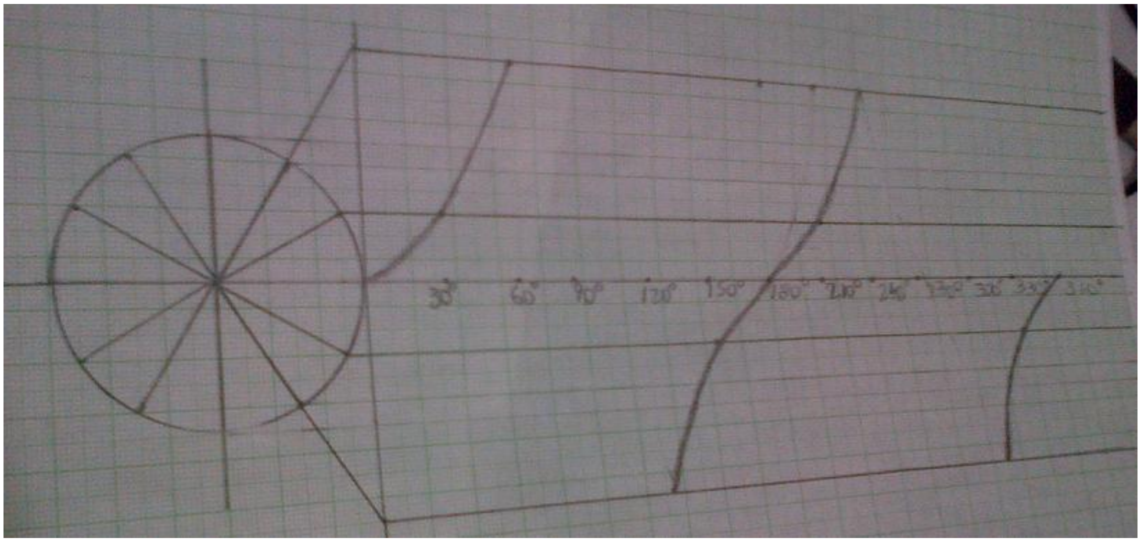


Fuente: autores.

DESCRIPCIÓN: el propósito de esta actividad consistía en construir la función trigonométrica tan(x). Para la construcción de esta función se realiza el mismo procedimiento que para la función sen(x) y cos(x). La diferencia consiste en que para construir la función tan(x) se ha de trazar una recta tan(x) a la circunferencia y perpendicular al eje x. Realizado esto los estudiantes se disponen a extrapolar la medida de cada ángulo con una recta hasta donde interseca con la recta tan(x). Se obtienen los puntos y se trazan rectas paralelas al eje x en los cuales se traza la función.

DEFINICIÓN: La actividad permite que los estudiantes argumenten y expliquen el proceso para construir la función tan(x). A partir de esto los estudiantes identifican los elementos que hacen posible esta construcción. Observan como la proyección de la hipotenusa a la recta tan(x) varía dependiendo de la abertura del ángulo.

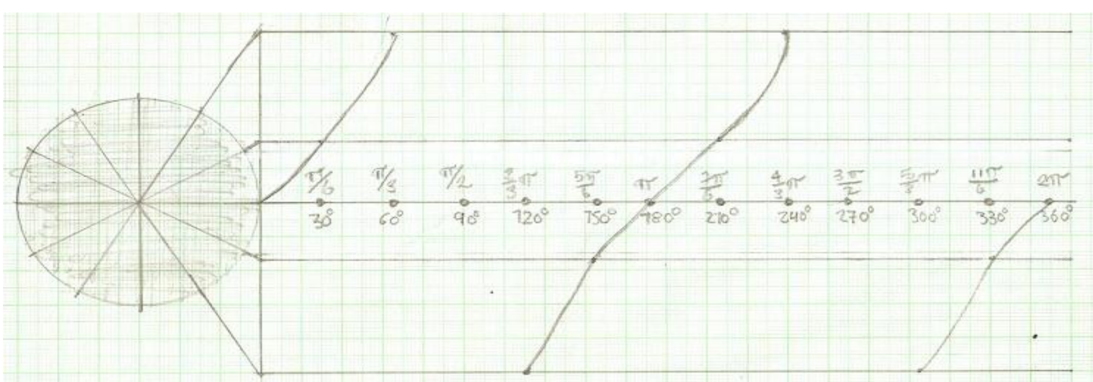
Figura 27. Construcción de la función tan(x).



Fuente: estudiantes.

DEMOSTRACIÓN: Los estudiantes explican y argumentan sus conjeturas y demostraciones sobre las variaciones del segmento de recta que se proyecta desde la hipotenusa hasta intersecarse con la recta tan(x) a la circunferencia. Partiendo de este análisis los estudiantes determinan que para valores de la forma $x = \frac{n\pi}{2}$ con n entero impar la función no está definida.

Figura 28. Construcción de la función tan(x) con sus respectivos radianes.



Fuente: estudiantes.

Tabla 9. Resumen aspectos “construcción de la gráfica de la función Tan(x)”

ACTIVIDAD	ASPECTOS POSITIVOS	ASPECTOS NEGATIVOS	ASPECTOS A MEJORAR
Construcción de la gráfica de la función Tan(x).	*Los estudiantes logran realizar la gráfica de la función tan(x). *Comprueban que al unir los puntos de cada segmento de arco en las paralelas al eje de las x se forma una curva llamada función tan(x). *Los jóvenes se motivan al trabajar de forma práctica. Manipulan los elementos para construir las gráficas y constantemente participan, realizando	*Los estudiantes presentaron dificultades en el momento de empezar a construir la función tan(x). Les costaba trabajo extrapolar la medida de los segmentos de recta que describen a cada ángulo hasta la recta tan(x). Al momento de graficar no comprendían la forma y la naturaleza de la función tan(x). Según palabras de los estudiantes: “la línea se pierde en	*Realizar una breve introducción sobre el concepto de recta tan(x) y extrapolación.

	preguntas ante las dudas que presentaban.	unas partes”. Haciendo referencia a que la función es continua en los Reales menos en $\frac{\pi}{2}+\pi k$.	

Situación 3. Elementos de la función tan(x). En esta actividad se hace uso del software Geogebra para determinar los elementos de la función tan(x). Para esto se creó un archivo (Ver anexo 8), donde los estudiantes encontraran cuatro gráficas diferentes. En estas gráficas determinaran los elementos que pertenecen a cada una de ellas. Estos elementos son amplitud, periodo, fase y constante de fase.

DESCRIPCIÓN: Describen los elementos geométricos presentes en las funciones: comprensión y alargamiento, amplitud, periodo y desfase o desplazamiento de fase. Describen los variantes e invariantes geométricos y numéricos.

DEFINICIÓN: La actividad permite que los estudiantes asocien formas y realicen conjeturas. Por ejemplo; en la función $F\ x\ = \frac{1}{2} tan\ \frac{x}{2}$ determinan que al remplazar $x = 90^{o}$, el resultado es:

$$\mathrm{F\ x\ = \frac{1}{2}tan\ \frac{90°}{2}} \quad \text{Remplazo x} = 90^{o}$$

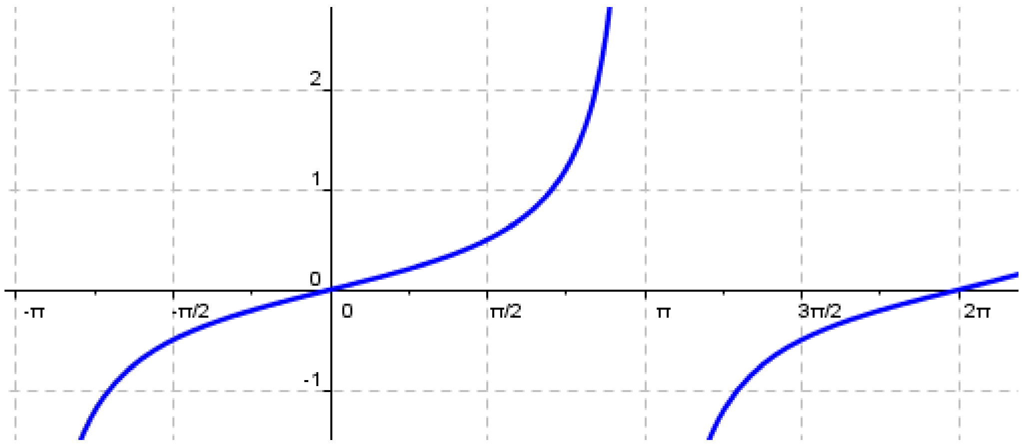
$$\mathrm{F\ x\ = \frac{1}{2}tan\ 45°} \quad \text{el argumento de la función es igual a } 45^{o}$$

$$\mathrm{F\ x\ = \frac{1}{2} * 1} \quad \text{debido a que tan } 45° \ = 1$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \text{ por ende cuando } x = 90^o \text{ la función toma un valor de } \frac{1}{2}.$$

Cómo $90^o = \frac{\pi}{2}$, por esta razón en la gráfica la imagen de $\frac{\pi}{2}$ es $\frac{1}{2}$. Una vez obteniendo este punto como referencia los jóvenes continúan remplazando valores y construyendo asi la gráfica de esta función; determinando los elementos que la componen.

Figura 29. Gráfica de la función tan(x) $F(x) = \frac{1}{2}tan\left(\frac{x}{2}\right)$ en el programa Geogebra.



Fuente: gráfica de función tan(x) realizada en el programa Geogebra por un estudiante.

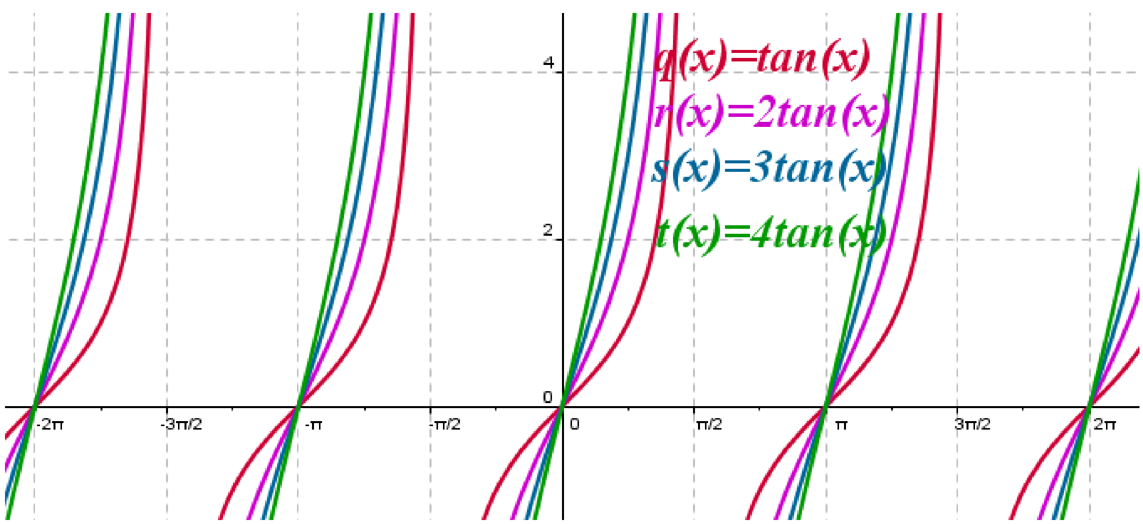
DEMOSTRACIÓN: Usan argumentos teóricos que les permiten encontrar relaciones entre los diferentes conceptos (periodo, amplitud, fase y constante de fase) y las gráficas de funciones.

Situación 4. Gráficas de función tan(x). En esta actividad se hace uso del software Geogebra para determinar cómo varia la función tan(x) dependiendo de su estructura (Ver anexo 8). Los estudiantes identificaran que elementos hacen posible que la función varíe de determinada forma, entre estos la amplitud, periodo, fase, constante de fase, comprensión y alargamiento.

DESCRIPCIÓN: Esta actividad consiste en que por grupos los estudiantes grafiquen un grupo de funciones e identifiquen sus elementos y sus variaciones con respecto a otras funciones. Los estudiantes realizan las gráficas en el software Geogebra y pasan a explicarles a sus demás compañeros de clase como se comportaban el grupo de funciones que les correspondía graficar. A su vez los demás grupos realizan este trabajo con grupos de funciones diferentes y pasan a exponer a sus compañeros. Describen los elementos geométricos presentes en las funciones: comprensión y alargamiento, amplitud, periodo y desfase o desplazamiento de fase. Describen los variantes e invariantes geométricos y numéricos.

DEFINICIÓN: La actividad permite que los estudiantes observen como varían las funciones partiendo de su estructura. Por ejemplo, si aumenta o disminuye la amplitud de determinada función.

Figura 30. Tomado del anexo (FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA TAN(X), Pág. 13) Variación de funciones por medio del programa Geogebra tan(x), 2tan(x)…



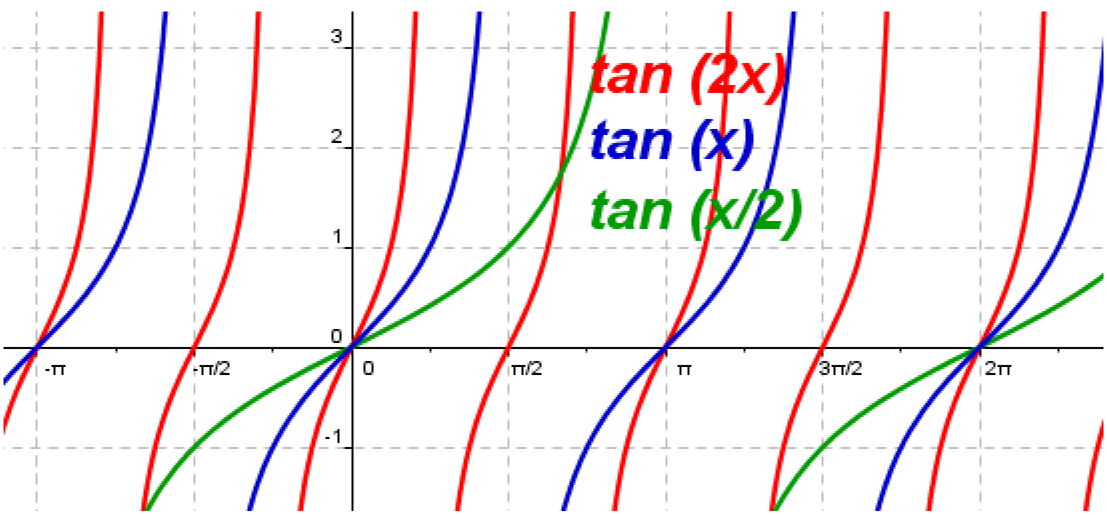
Fuente: autores.

Los estudiantes observan que al incrementar o disminuir el valor de la amplitud la función varia respecto al eje y.

Al multiplicar un valor de amplitud mayor que 1 la función tan(x) tiende a cerrarse y tener la forma de una línea recta. Esto se debe a que la función se itera hasta tal punto que pierde su forma curvilínea. Pero al multiplicar una variable que sea mayor que 0 y menor que 1, la función será cada vez más curvilínea con respecto al eje x.

Por ejemplo, al multiplicar una constante a la fase (x), el periodo de la función varía. Si esta constante es mayor que 1 la función tan(x) se comprimiría disminuyendo su periodo y cuando esta constante es mayor que cero y menor que 1, la función tan(x) se alargaría incrementando su periodo.

Figura 31. Tomado del anexo (FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA TAN(X), Pág. 15) Variación de funciones por medio del programa Geogebra: tan x, tan 2x, tan x/2…



Fuente: autores.

Para la función $y = tan\,(2x)$ el periodo es el siguiente $\pi/2$. Porque $T = \pi$. Así mismo para la función $y = tan\ \frac{x}{2}$ el periodo es $2\,\pi$.

DEMOSTRACIÓN: Encuentran y demuestran que la función tan(x) tiene infinitas posibilidades. La función tan(x) depende de muchas variantes e invariantes y cada uno de los elementos que la componen altera la estructura de la misma. Los estudiantes logran identificar en que aspecto cambia una función si se varía determinado elemento.

En este proyecto se evidenciaron varios aspectos acerca de cómo los estudiantes aprendían conceptos, reproducían gráficos, que habilidades utilizaban y cuales desarrollaban.

Las actividades se diseñaron e implementaron de forma sistemática con un orden preestablecido, siguiendo la secuencia de la temática de funciones trigonométricas planteada en la malla curricular de la Institución Educativa Francisco Arango, partiendo de conceptos previos, sistemas de representación de ángulos, razones y funciones trigonométricas. Siguiendo este orden se tomaron aspectos positivos, negativos y a mejorar para futuras aplicaciones y crecimiento de la didáctica en el estudio de las funciones trigonométricas.

Entre los aspectos positivos tenemos los siguientes:

- Los estudiantes comprenden la importancia de la trigonometría en la historia de la humanidad e identifican la importancia de esta área de las matemáticas en muchas otras disciplinas, bien sean teóricas y/o prácticas.
- Logran conocer diferentes áreas de aplicación que no conocían anteriormente aumentando su vocabulario.
- Expresan de forma precisa y especifica en que partes de determinada área, por ejemplo la ingeniería se puede aplicar la trigonometría.
- Visualizan, analizan y clasifican que implicaciones tiene la trigonometría en la construcción de un puente, de un acueducto o de un edificio.

Además, algunos jóvenes logran identificar la longitud de un arco partiendo de la gráfica de la circunferencia goniometría. Construyen un concepto básico de la unidad radian, como la longitud de circunferencia asociada al radio de esta.

Las razones trigonométricas son base fundamental para el estudio de las funciones trigonométricas. En este aspecto los estudiantes identifican el triángulo inscrito en el interior de la circunferencia con hipotenusa de radio 1. Relacionan la dependencia de los catetos al ángulo de abertura. Desarrollan los problemas que en la guía se plantean con algunas dificultades.

Los estudiantes reproducen las funciones trigonométricas (sen(x), cos(x) y tan(x)). Se guían de la construcción y explicación del docente para lograrlo. Toman en cuenta los procedimientos, los conceptos previos y el manejo de materiales para llevar a cabo la actividad. Una vez construyen la función sen(x) se les facilita realizar la de función cos(x) y tan(x); aunque tienen dificultades porque una varia de la otra dependiendo de su estructura.

Aspectos negativos: los estudiantes presentan dificultades en la organización de sus ideas. Tienen la capacidad para redactar escritos, resolver conjeturas y realizar distintas reproducciones, pero les cuesta darle una secuencia lógica las ideas que poseen. Presentan dificultades en el paso de grafica a ecuación. En la actividad de sistema radian de conversiones de grados a radianes, lograban comprender de manera básica el concepto de radian; pero cuando realizaban las conversiones de manera ecuacional les costaba llevar a cabo el procedimiento matemático. Se realiza una breve explicación de regla de 3 simple para que los estudiantes lograran comprender la conversión de radianes a grados.

Las razones trigonométricas son base para la construcción de las funciones trigonométricas. Identifican el triángulo rectángulo inscrito en la circunferencia con sus elementos (catetos e hipotenusa). Pero en la solución de problemas los estudiantes debían manejar escalas, en lo cual tuvieron dificultades.

Se les pedía a los estudiantes hallar el ángulo de inclinación para determinados problemas. En vista de que a los estudiantes les costaba manejar las escalas, fue necesario recordar a los estudiantes el manejo de la ecuación de pendiente, para que utilicen cualquier punto de recta y así identifiquen el ángulo de inclinación.

En la construcción de la función sen(x) los estudiantes presentaron dificultades en el manejo de la longitud de arco, al desplazarla a las rectas paralelas al eje x. Poseían dificultades para comprender que esta longitud de arco que se trasladaba a las rectas paralelas tiene también un valor en radianes.

Los estudiantes presentaron dificultades en el momento de empezar a construir la función cos(x). No recordaban que en el punto (1,0) la longitud del cateto adyacente que describe la razón cos(x) vale uno (1); la cual se traslada al eje vertical para iniciar a construir la función desde el punto (0,1).

Los estudiantes presentaron dificultades en el momento de empezar a construir la función tan(x). Les costaba trabajo extrapolar la medida de los segmentos de recta que describen a cada ángulo hasta la recta tan(x). Al momento de graficar no comprendían la forma y la naturaleza de la función tan(x). Según palabras de los estudiantes: “la línea se pierde en unas partes”. Haciendo referencia a que la función es continua en los Reales menos en $\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Aspectos a mejorar: Los aspectos a mejorar son las conexiones a internet, redacción, conceptos previos, construcción de conceptos y representación gráfica y algebraica. Los estudiantes presentan problemas de redacción, por eso es importante que los estudiantes logren aclarar ideas y les puedan dar orden para plasmarlas en sus escritos. Antes de realizar las actividades identificar los conceptos previos necesarios para avanzar en la temática. Construcción de conceptos partiendo del análisis gráfica y de ecuaciones. Es importante que los estudiantes aprendan a partir de la construcción de gráficas, conversión de grados a radianes y viceversa y solución de problemas de triángulos rectángulos que los estudiantes construyan sus propios conceptos, como los son radian, perímetro, circunferencia, radio, arco, entre otros. La representación gráfica y algebraica son quizá los elementos más importantes. A través de ellas los estudiantes a partir de una ecuación pueden deducir el ángulo que se representaría gráficamente posteriormente; a su vez a partir de una gráfica pueden identificar como seria la ecuación de una función sin necesidad de realizar operaciones algebraicas.

5. ANÁLISIS GENERAL DE LOS NIVELES DE VAN HIELE EN CADA ACTIVIDAD

En este capítulo presentamos el análisis de las actividades teniendo en cuenta los niveles de Van Hiele, que ya fueron enunciados en un capitulo anterior; tenemos en cuenta los niveles de visualización o reconocimiento, análisis y por último el nivel de ordenación o clasificación.

5.1 ACTIVIDAD 1. HISTORIA DE LA TRIGONOMETRIA.

NIVEL 0: VISUALIZACIÓN O RECONOCIMIENTO.

En este nivel los estudiantes identificaron elementos de la trigonometría que se construyeron a través de la historia. En la presentación "Historia, definición y campos de aplicación de la trigonometría" lograron visualizar como en la antigüedad se evidenciaban la trigonometría. Observaron que en las antiguas pirámides de Egipto, zigurat de la Mesopotamia, astrolabios, etc. existía una constante. Esta constante es la trigonometría del triángulo rectángulo.

NIVEL 1: ANÁLISIS.

Identifican que para cada una de estas construcciones de la antigüedad se tuvo que utilizar herramientas básicas como un gnomon y un scaphe, reglas y escuadras. Determinaron que los antiguos arquitectos e ingenieros debieron haber utilizado herramientas matemáticas para darle solución a diversos problemas de la vida cotidiana.

A continuación se muestra el cuadro resumen de los niveles alcanzados por los estudiantes durante la primera actividad.

Tabla 10. Niveles de los estudiantes primera actividad.

	ACTIVIDAD 1			
ESTUDIANTE	0	1	2	3
E1	X			
E2	X			
E3	X	X		
E4	X			
E5	X	X		
E6	X	X		
E7	X	X		
E8	X			
E9	X	X		
E10	X	X		
E11	X	X		

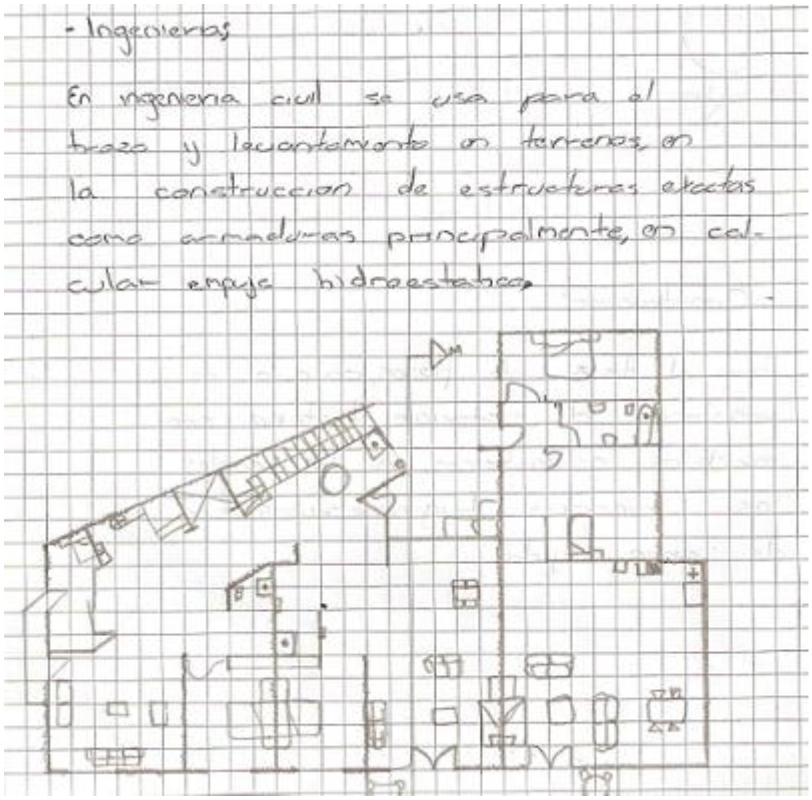
Durante el desarrollo de la primera actividad la mayoría de los estudiantes alcanzaron los niveles 0 y 1. Evidenciaron el constructo histórico de la trigonometría desde tiempos primitivos hasta la época moderna.

5.2 ACTIVIDAD 2. REVISIÓN DE GUÍA “DEFINICIÓN Y CAMPOS DE APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA”.

NIVEL 0: VISUALIZACIÓN O RECONOCIMIENTO.

Los estudiantes tienen la capacidad para visualizar los campos de acción de la trigonometría. En física visualizan los diagramas de fuerza para darle solución a determinados problemas. En juegos de video observan como los técnicos e ingenieros utilizan la trigonometría para representar procesos naturales y/o físicos. Se apoyan en sus experiencias para describir fenómenos físicos como el billar pool. Identifican que para llevar a cabo determinadas jugadas deben tener en cuenta los ángulos y triángulos correctos. En geografía identifican en los mapas los paralelos y meridianos para definir sistemas de coordenadas. Observan que existen aparatos electrónicos que describen determinadas señales por medio de funciones trigonométricas, a lo cual los estudiantes llaman ondas. En construcción visualizan los determinados elementos que utilizan los ingenieros para calcular la resistencia de materiales, en modelos geométricos utilizando las funciones trigonométricas.

Figura 32. Aplicaciones de la trigonometría.

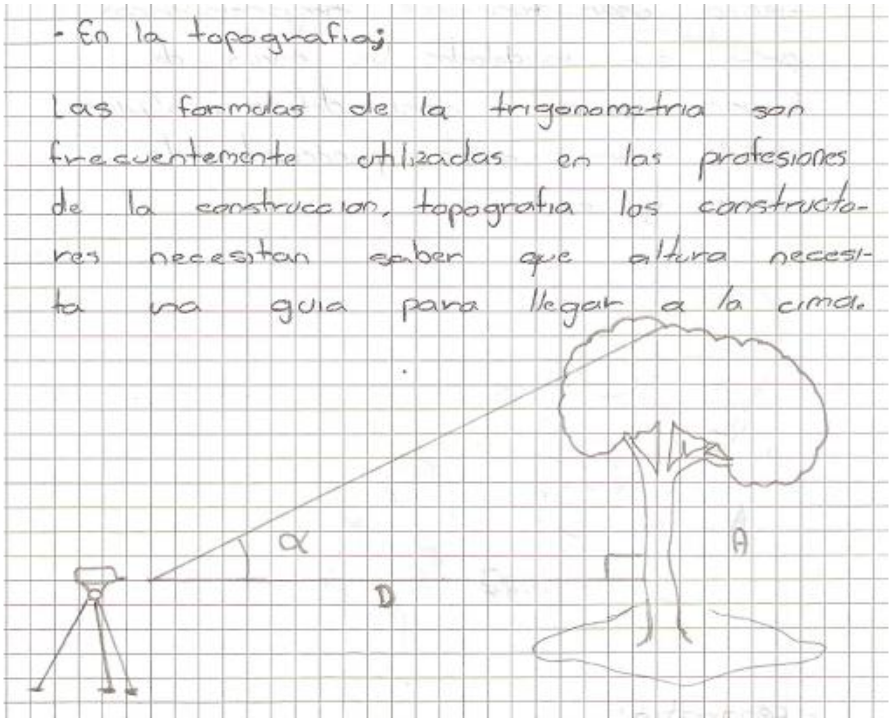


Fuente: estudiantes.

NIVEL 1: ANÁLISIS.

En este nivel los estudiantes logran identificar las posibilidades de la trigonometría en diversas áreas del conocimiento. Especifican en que circunstancias en determinados oficios y trabajos la trigonometría tiene lugar. Como lo son las coordenadas en un mapa, diagramas de cuerpo libre en física, razones trigonométricas en la medida de ángulos de inclinación de construcción y funciones trigonométricas en estudios de fenómenos que se realizan a través de aparatos electrónicos.

Figura 33. Aplicaciones de la trigonometría.



Fuente: estudiantes.

A continuación se muestra el cuadro resumen de los niveles alcanzados por los estudiantes durante la segunda actividad.

Tabla11. Niveles de los estudiantes segunda actividad.

	ACTIVIDAD 2			
ESTUDIANTE	0	1	2	3
E1	X			
E2	X	X		
E3	X	X		
E4	X	X		
E5	X	X		
E6	X	X		
E7	X	X		
E8	X			
E9	X	X		
E10	X	X		
E11	X	X		

Durante el desarrollo de la segunda actividad la mayoría de los estudiantes alcanzaron los niveles 0 y 1. Determinaron las diversas aplicaciones que tiene la trigonometría en diferentes áreas del conocimiento.

5.3. ACTIVIDAD 3. OBSERVACIÓN DEL VIDEO INTERACTIVO "COMO MIDIÓ EL RADIO DE LA TIERRA ERATÓSTENES".

NIVEL 0: VISUALIZACIÓN O RECONOCIMIENTO.

Los estudiantes observan el video: "Como Eratóstenes midió el radio de la Tierra". En este video los estudiantes identifican aspectos de la geometría básica. Elementos tales como circunferencia, rectas verticales, radio, ángulo, la razón trigonométrica tan(x), rectas paralelas, recta secante y ángulos alternos – internos.

Los estudiantes identificaron la circunferencia como: "es toda la línea que bordea a la Tierra, es la forma de ella". Identificaron esta forma basados en sus experiencias con objetos de la vida cotidiana.

Identificaron las rectas verticales al imaginarse los rayos del sol que se reflejaban en el fondo del pozo que se muestra en el video. Determinaron que los rayos del sol a las 12 m. llegan a la Tierra de forma perpendicular a esta.

Los estudiantes aclararon ideas acerca del radio de una circunferencia. Puesto que en el video se evidenciaba el análisis de Eratóstenes, acerca de los rayos que entran al pozo y llegan al centro de la Tierra, determinándose así el radio de la misma.

Los estudiantes reconocieron la importancia de la medida de los ángulos en el descubrimiento que realizo Eratóstenes. Visualizaron las dos posibles formas de cómo Eratóstenes obtuvo la medida del ángulo. Una de estas que supone herramientas de medición como el gnomon y el scaphe que utilizados juntos arrojaba el valor en grados del ángulo formado por la hipotenusa y la sombra del obelisco. La otra posibilidad fue la razón entre los lados del triángulo allí formado y la tabla de equivalencias utilizando la razón trigonométrica tan(x).

Fueron dos posibles formas de cómo Eratóstenes pudo medir aquel ángulo que necesitaba para continuar con su trabajo. Los estudiantes identificaron al ángulo como “la distancia en grados de dos líneas que se cruzan”.

NIVEL 1: ANÁLISIS.

En la descripción realizada por los estudiantes del video: “Cómo se midió por primera vez la Tierra” lograron describir conceptos y propiedades de elementos de la geometría y la trigonometría.

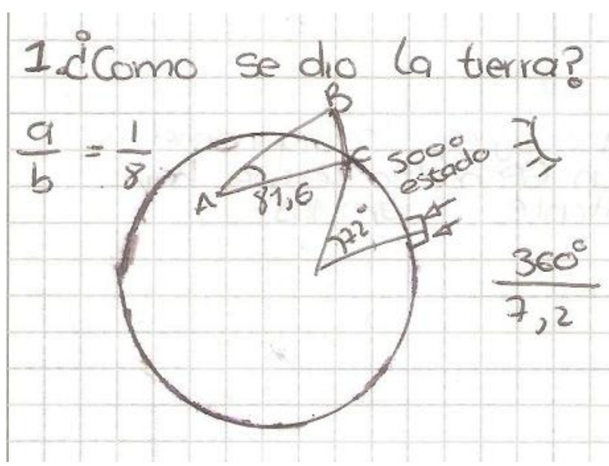
a. Circunferencia: “es toda la línea que bordea a la Tierra, es la forma de ella”.

b. Radio: “distancia que hay de el centro de la circunferencia al borde de ella”.

c. Ángulo: “la distancia en grados de dos líneas que se cruzan”.

d. Triángulo rectángulo:”Es un triángulo que tiene un ángulo de 90 grados y la suma de sus ángulos es de 180 grados”.

Figura 34. Cómo midió el radio de la Tierra Eratóstenes.



Fuente: estudiantes.

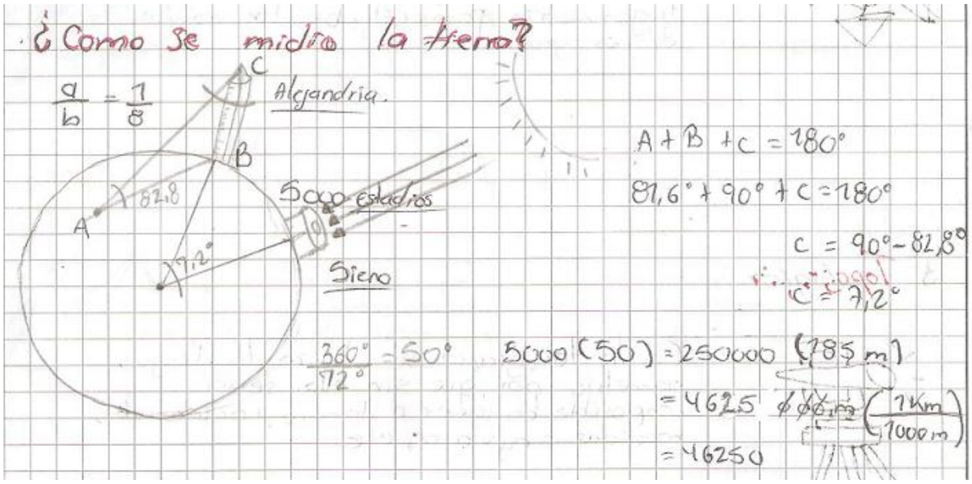
NIVEL 2: ORDENACIÓN O CLASIFICACIÓN.

Los jóvenes se les dificultan describir el procedimiento geométrico y matemático que realizo Eratóstenes. Logran comprender algunos significados y definiciones. Reconocen algunas propiedades, pero les cuesta realizar relaciones entre estas propiedades y sus consecuencias.

Eratóstenes realiza una construcción geométrica trazando dos rectas paralelas, una pasando por el pozo de la ciudad de Siena y otra pasando por el obelisco en Alejandría. Los estudiantes logran identificar este paso fácilmente puesto que conocen el concepto de rectas paralelas. El siguiente paso que realiza Eratóstenes es trazar una recta secante desde la punta del obelisco hasta el centro de la Tierra. Los estudiantes se preguntan ¿Por qué Eratóstenes traza una línea que no existe? ¿Qué es una recta secante? Los estudiantes no logran entender la maquinaria geométrica que allí se encuentra para dar solución a una parte del problema. Para esto fue necesario detener el video y explicarles a los estudiantes en que correspondía lo que allí estaba planteando Eratóstenes.

Para deducir el ángulo formado por la hipotenusa que forma la sombra y el obelisco y a su vez deducir el ángulo formado por la ciudad de Siena hasta la ciudad de Alejandría, Eratóstenes utiliza el concepto de ángulos alternos internos. Los estudiantes no lograban asociar este concepto al ángulo de 7,2 grados que había hallado Eratóstenes.

Figura 35. Análisis Cómo midió el radio de la Tierra Eratóstenes.



Fuente: estudiantes.

Posteriormente los estudiantes continúan observando el video pero no logran asimilar lo que allí se plantea. Poseen dificultades para construir modelos matemáticos partiendo de un gráfico. Mas exactamente cuando en el video se explica la escala que utilizaba Eratóstenes mediante la longitud de los estadios.

A continuación se muestra el cuadro resumen de los niveles alcanzados por los estudiantes durante la tercera actividad.

Tabla 12. Niveles de los estudiantes tercera actividad.

	ACTIVIDAD 3			
ESTUDIANTE	0	1	2	3
E1	X			
E2	X	X		
E3	X	X	X	
E4	X	X	X	
E5	X	X		
E6	X	X		
E7	X	X		
E8	X			
E9	X	X	X	
E10	X	X		
E11	X	X	X	

Durante el desarrollo de la tercera actividad la mayoría de los estudiantes alcanzaron los niveles 0 y 1. Algunos estudiantes alcanzaron el nivel 2 evidenciando una mejoría. Comprobaron el procedimiento matemático y geométrico realizado por Eratóstenes para la medición del radio de la Tierra.

5.4 ACTIVIDAD 4. DESARROLLO DE LA GUÍA “CIRCUNFERENCIA Y SÓLO”.

NIVEL 0: VISUALIZACIÓN O RECONOCIMIENTO.

En este nivel los estudiantes perciben la circunferencia como un todo, no diferencian algunas de sus características y propiedades. Las descripciones que realizan del arco, diámetro, radio y perímetro son visuales y tendientes a asemejarlas con elementos familiares como, ruedas, cuerdas, varas, etc.

Ejemplo: al deslizar el punto que se encuentra sobre la circunferencia observan que esta longitud barrida se parece a una longitud de cuerda. Observan que esta longitud va cambiando de color respecto a la circunferencia.

NIVEL 1: ANÁLISIS.

En este nivel los estudiantes perciben propiedades de los elementos de la circunferencia. Pueden describir elementos de esta a través de sus propiedades (ya no sólo visualmente). Pero no pueden relacionar las propiedades unas con otras.

Ejemplo: Los elementos de la circunferencia son base fundamental para el estudio del sistema radian. Los estudiantes logran identificar la dependencia de la longitud del arco respecto al ángulo barrido. Pero les es difícil asimilar el hecho que un radian es igual al radio de la circunferencia, es decir; en su percepción de las cosas no observan la semejanza de las distancias puesto que el radio es una línea recta y un radian es una longitud de arco, que por su naturaleza es curva.

Para algunos jóvenes las conversiones de grados a radianes fue de fácil comprensión. Los estudiantes comprendieron de manera general que la medida de la longitud de la circunferencia que vale 360 grados equivale en radianes a $2\pi rad$.

Así pues, de manera matemática por medio de una regla de tres simple lograban realizar conversiones.

NIVEL 2: ORDENACIÓN O CLASIFICACIÓN.

Los estudiantes no logran describir los elementos y figuras de manera formal. Entienden algunos significados de las definiciones. Reconocen algunas propiedades que derivan de otras, por ejemplo, la longitud de arco que a su vez hace parte de la circunferencia total. No logran hacer relaciones entre gráficas y elementos matemáticos para realizar conversiones. Por ejemplo, no logran comprender la medida de un radian como la medida del radio de la circunferencia, pero si logran realizar conversiones por medio de un método matemático. Existe una desconexión entre el concepto de radian desde un modelo gráfico a la conversión de estos por medio de un método matemático.

A continuación se muestra el cuadro resumen de los niveles alcanzados por los estudiantes durante la cuarta actividad.

Tabla 13. Niveles de los estudiantes cuarta actividad.

	ACTIVIDAD 4			
ESTUDIANTE	0	1	2	3
E1	X	X		
E2	X	X		
E3	X	X		
E4	X	X	X	
E5	X	X		
E6	X	X		
E7	X	X	X	
E8	X			
E9	X	X		
E10	X	X	X	
E11	X	X	X	

Durante el desarrollo de la cuarta actividad la mayoría de los estudiantes alcanzaron los niveles 0 y 1 y algunos alcanzaron el nivel 2. Comprobaron que la razón existente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro siempre va a ser igual al número π.

5.5 ACTIVIDAD 5. DESARROLLO DE LA GUÍA "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS"

En esta actividad estudiamos las razones trigonométricas, para ello usamos el programa Geogebra, en el cual se construyó una plantilla para que los estudiantes resolvieran los ejercicios. La plantilla consiste en una circunferencia asociada a la aplicación deslizador del programa que determina el ángulo de abertura desde el eje x positivo hasta un punto en la circunferencia. A partir de esto los estudiantes arrastran el punto del deslizador y determinan el ángulo y longitud de arco que varía sobre el borde de la circunferencia, conociendo esto se disponen a resolver la actividad propuesta.

Posteriormente identifican la hipotenusa y los catetos adyacente y opuesto que allí se encuentran y observan que a medida que el ángulo varía también lo hace la longitud de los catetos. Con esta información proceden a resolver los problemas a los cuales se da solución utilizando una escala propuesta por ellos mismos. Esta la ajustan al tamaño de la circunferencia para hallar ángulos y alturas según asi lo requiera el problema.

NIVEL 0: VISUALIZACIÓN O RECONOCIMIENTO.

En este nivel los estudiantes perciben la circunferencia gonio métrica y el triángulo rectángulo inscrito en ella como un todo. Los estudiantes al tener la experiencia con la plantilla de la actividad 4 (“CIRCUNFERENCIA Y SÓLO”) saben que alguna parte de la estructura allí plasmada va a variar si desplazan el botón deslizador. Al realizar esta operación observan que a medida que el ángulo varia así mismo lo hacen las longitudes de los lados del triángulo. Los estudiantes evidencian este cambio pero aun no logran diferenciar las características de estos lados del triángulo y sus propiedades. Hasta el momento los estudiantes interactuaban a manera de juego y observan que pasaba con el deslizador, pero no diferencian las características de los elementos todavía.

NIVEL 1: ANÁLISIS.

Se perciben propiedades de los objetos geométricos. Los estudiantes identifican la hipotenusa, cateto opuesto y adyacente del triángulo rectángulo. Observan que al variar la amplitud del ángulo así mismo varían la longitud de estos catetos. Pueden describir los elementos del triángulo rectángulo a través de sus propiedades. Pero se les dificulta la resolución de problemas con el uso de la plantilla que allí se encuentra.

Ejemplo:

En el problema: “en el momento del día en que los rayos del sol forman un ángulo de 60 grados con la horizontal, la sombra que proyecta un árbol en el suelo es de 2,6 m” ¿Cuánto mide el árbol?

Los estudiantes resuelven el problema de dos formas diferentes:

I. Algunos estudiantes utilizan la plantilla del programa Geogebra asi:

a. Toman el eje x como la superficie del terreno donde se encuentra el árbol.
b. Toman el eje y como la altura del árbol.
c. La hipotenusa es determinada como la recta imaginaria donde se forma la sombra hasta un punto (2,6; 0).
d. utilizan el botón deslizador y lo desplazan hasta llegar al ángulo de 60 grados.
e. insertan un punto arbitrario en la vista gráfica con coordenadas (2,6; 0).
f. desplazan este punto hasta que este interseca con la recta que se extrapola dese la hipotenusa con el ángulo dado. Encuentran que ahora el punto es (2,6; 4,5), es decir, la altura del árbol es de 4,5 m.

II. Algunos estudiantes resuelven el problema de manera manual:

a. identifican las variables del problema y representan gráficamente el posible esquema.
b. construido el triángulo rectángulo nombran cada una de sus partes (catetos, hipotenusa y ángulos).
c. analizan la razón trigonométrica acorde para hallar la altura del árbol (cateto opuesto)
d. utilizan la razón trigonométrica tan(x), pasan a multiplicar el valor del cateto adyacente y despejan el valor del cateto opuesto. Para finalizar remplazan los números en cada una de las variables y operan en la calculadora, obteniendo así el valor de la altura del árbol.

NIVEL 2: ORDENACIÓN O CLASIFICACIÓN.

Los estudiantes realizan gráficos por medio del triángulo rectángulo para representar los problemas. Identifican los elementos de un triángulo para dar una posible solución a los problemas allí planteados. Establecen relaciones entre los elementos del triángulo con las razones trigonométricas a utilizar para resolver problemas. Entienden los significados de las definiciones. Reconocen como algunas propiedades derivan de otras. Establecen relaciones entre propiedades y sus consecuencias.

Ejemplo. Para resolver el problema anterior los jóvenes logran visualizar el problema en sus mentes. Realizan conjeturas acerca de la posición del árbol, longitud de la sombra y el ángulo formado por la longitud de la sombra respecto de la altura del árbol. Logran representar gráficamente el problema en sus cuadernos de notas y relacionan las características del triángulo que allí se forma para encontrar la razón trigonométrica correcta para hallar la altura del árbol.

A continuación se muestra el cuadro resumen de los niveles alcanzados por los estudiantes durante la quinta actividad.

Tabla 14. Niveles de los estudiantes quinta actividad.

	ACTIVIDAD 5			
ESTUDIANTE	0	1	2	3
E1	X	X		
E2	X	X	X	
E3	X	X		
E4	X	X		
E5	X	X	X	
E6	X	X	X	
E7	X	X	X	
E8	X			
E9	X	X		
E10	X	X		
E11	X	X	X	

Durante el desarrollo de la quinta actividad la mayoría de los estudiantes alcanzaron los niveles 0 y 1 y algunos alcanzaron el nivel 2. Los estudiantes realizan esquemas gráficos para representar problemas y datos. Identifican las razones trigonométricas acordes para la solución de determinados problemas, mediante ecuaciones y expresiones algebraicas.

5.6 ACTIVIDAD 6. CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SEN(X).

NIVEL 0: VISUALIZACIÓN O RECONOCIMIENTO.

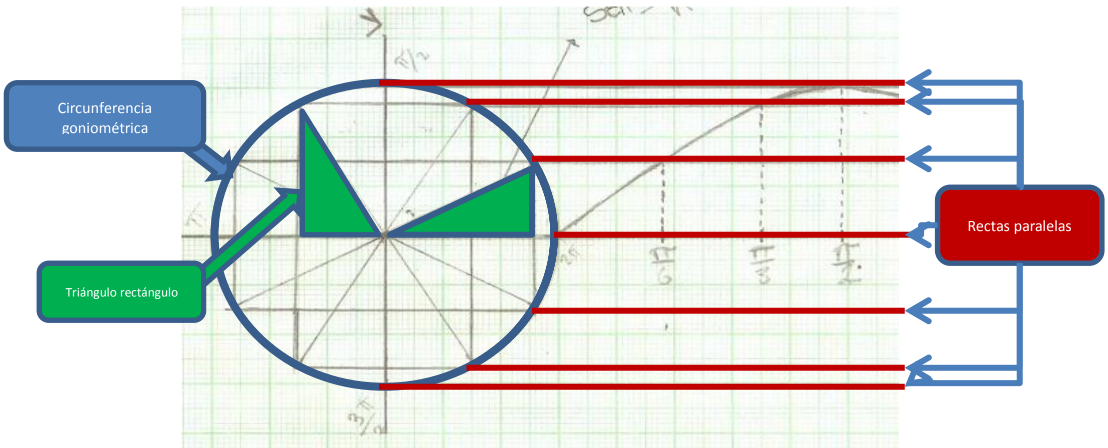
El propósito de esta actividad consistía en construir la función trigonométrica sen(x). La construcción se realiza por medio de papel milimetrado, regla, transportador y cordón. Para lograr esta reproducción el docente realiza la gráfica en el tablero. Explica los pasos a seguir a medida que los estudiantes van realizando la reproducción. El docente construye la gráfica partiendo de una recta horizontal y una circunferencia en un extremo del tablero. Posteriormente realiza la división de la circunferencia de ángulos de a 30^{o}. Se trazan rectas horizontales a cada uno de los puntos de la circunferencia donde se marcaron los ángulos. Teniendo este constructo gráfico ahora sólo faltaba graficar la función. Se utiliza el cordón para medir el arco de circunferencia de cada ángulo. Luego se estira el cordón en forma de línea recta y se ubica el punto correspondiente a cada ángulo con su paralela. Para finalizar se unen los puntos y se obtiene la función sen(x).

NIVEL 1: ANÁLISIS.

Se perciben propiedades de los objetos geométricos. Los jóvenes entienden que para construir la función sen(x) necesitan de la ayuda de las razones trigonométricas vistas previamente. Los estudiantes determinan que para su construcción se han de necesitar diversas herramientas y conceptos previos.

Los estudiantes identifican elementos tales como la circunferencia , el triángulo rectángulo que se forma en su interior, las rectas paralelas que parten desde el punto donde la hipotenusa interseca un punto de la circunferencia. En este punto a los estudiantes se les dificultaba la idea del por qué de realizar estas rectas; puesto que desconocían su función como referencia en el plano cartesiano donde estas intersecarían con la longitud de arco que se determinaría a partir de cada ángulo medido en radianes.

Figura 36. Visualización función sen(x).



Fuente: autores.

Los estudiantes en su mayoría tuvieron dificultades en esta asociación y en la conversión de grados a radianes. Por esta razón sólo utilizaban la medida del arco del primer ángulo 30^{o} y lo seguían desplazando en el eje x y asi trazar una vertical punteada que se intersecara con las rectas paralelas. Esto con el fin de asociar la longitud de arco con la recta paralela y asi obtener los puntos que definirían la función sen(x).

Figura 37. Ejemplo elaboración función sen(x).

Fuente: autores.

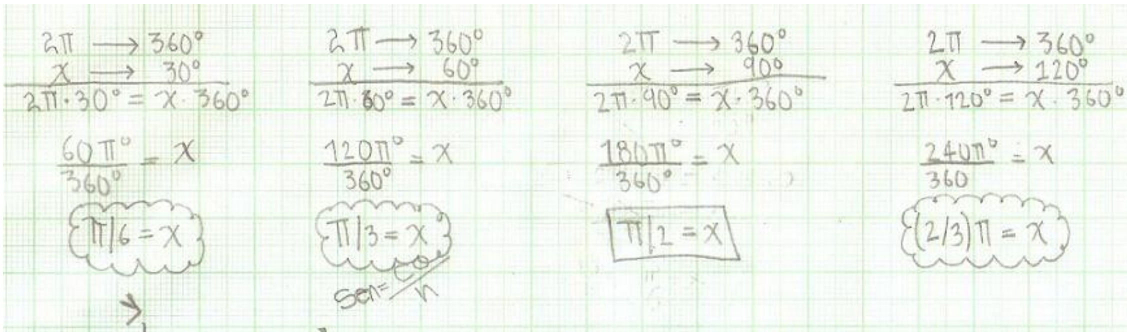
En este sentido estos estudiantes construyeron la función sen(x) como un ejercicio mecánico, pero sin realizar una asociación entre conceptos como arco, cateto, radian, etc. y procedimientos tales como la conversión de grados a radianes.

NIVEL 2: ORDENACIÓN O CLASIFICACIÓN.

Los estudiantes realizan la construcción de la función sen(x) estableciendo relaciones entre diversos elementos que la componen. Entienden los significados de las definiciones (arco, radian, ángulo, rectas paralelas, entre otros). Realizan procedimientos matemáticos para determinar la equivalencia entre grados y radianes para determinados ángulos. Realizan procedimientos geométricos y de dibujo para determinar la curvatura que representa la función sen(x).

Los jóvenes determinan la relación existente entre la abertura del ángulo y la longitud de arco de circunferencia. Teniendo esto en cuenta dividen la circunferencia goniométrica en secciones de a 30^{o}. Realizan cálculos acerca de la equivalencia en radianes de estos grados por medio de una regla de tres simple.

Figura 38. Conversión grados a radianes.

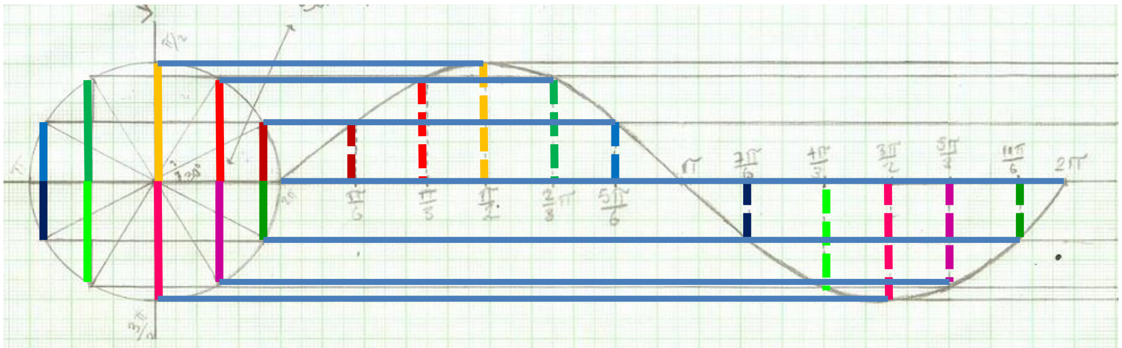


Fuente: estudiantes.

Los estudiantes realizan la conversión de 30^o a $\frac{\pi}{6}$. Observan que cada ángulo tiene una medida igual, luego sólo a cada ángulo le suman un valor de $\frac{\pi}{6}$, para asi determinar el valor en radianes para los ángulos $60^o, 90^o, 120^o, 150^o, 180^o, 210^o, 240^o, 270^o, 300^o, 330^o\ y\ 360^o$. Así pues logran relacionar el concepto de arco y su proyección en el eje x medida en radianes.

Geométricamente los jóvenes lograron comprobar la razón por la cual se trazaban rectas paralelas al eje x. Identificaron que la longitud de la hipotenusa intersecaba un punto en la circunferencia . A partir de este punto determinaban la altura del cateto opuesto al ángulo y por ende la amplitud que tomaría la función sen(x). En este punto los estudiantes argumentaron que a cada longitud de cateto en el eje y dado por el ángulo de abertura le correspondería una longitud de arco respectiva en radianes en el eje x. por esta razón a cada proyección representada con una línea punteada le corresponde una única recta paralela.

Figura 39. Construcción función sen(x).



Fuente: Autores.

A continuación se muestra el cuadro resumen de los niveles alcanzados por los estudiantes durante la sexta actividad.

Tabla 15. Niveles de los estudiantes sexta actividad.

	ACTIVIDAD 6			
ESTUDIANTE	0	1	2	3
E1	X	X		
E2	X	X		
E3	X	X	X	
E4	X	X		
E5	X	X	X	
E6	X	X	X	
E7	X	X	X	
E8	X	X		
E9	X	X	X	
E10	X	X	X	
E11	X	X	X	

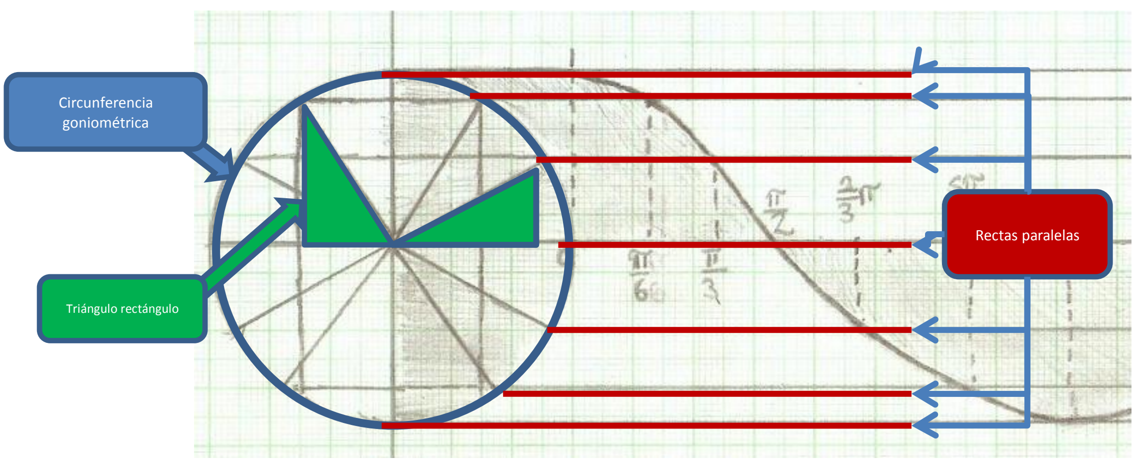
Durante el desarrollo de la sexta actividad la mayoría de estudiantes alcanzaron el nivel 2. Los estudiantes utilizan ideas previas y preconceptos acerca de las razones trigonométricas y conversión de grados a radianes para la construcción de la función sen(x). Identifican los elementos que la componen y sus variaciones, contracciones y dilataciones partiendo de su estructura.

5.7 ACTIVIDAD 7. CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COS(X).

NIVEL 0: VISUALIZACIÓN O RECONOCIMIENTO.

El propósito de esta actividad consistía en construir la función trigonométrica cos(x). El procedimiento a utilizar es básicamente el mismo que se usó para la construcción de la función sen(x).

Figura 40. Visualización función cos(x).



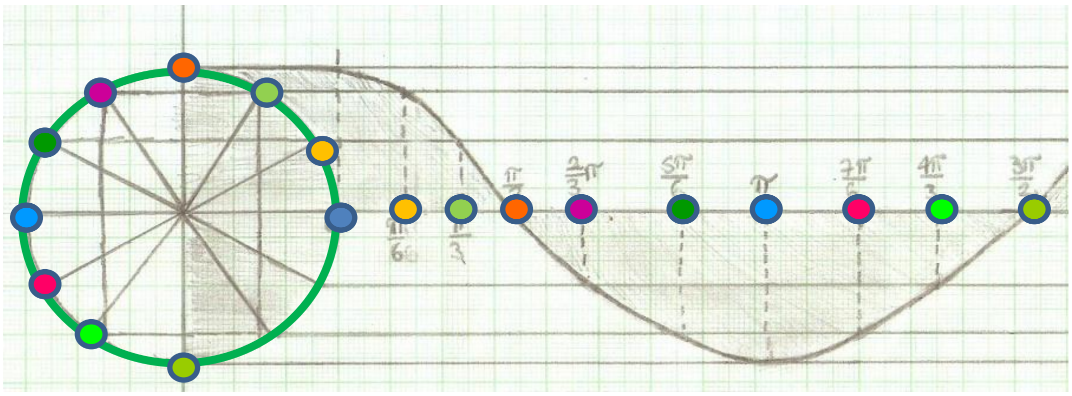
Fuente: autores.

NIVEL 1: ANÁLISIS.

Los estudiantes argumentan propiedades de los objetos geométricos. Los jóvenes hacen uso de las razones trigonométricas vistas previamente para realizar esta construcción. Los estudiantes determinan que se han de necesitar diversas herramientas y conceptos previos.

Los estudiantes identifican elementos similares a los vistos anteriormente para la construcción se la función sen(x). Evidencian dificultades puesto que desconocían la función de las rectas paralelas como referencia en el plano cartesiano, donde estas intersecarían en un punto de la circunferencia goniométrico cada 30^o.

Figura 41. Ejemplo elaboración función cos(x).



Fuente: autores.

Los estudiantes utilizaban la medida del arco del primer ángulo 30^o y lo seguían desplazando en el eje x y asi trazar una vertical punteada que se intersecara con las rectas paralelas; esto con el fin de después asociar longitud de arco con la recta paralela y así obtener los puntos que definirían la función cos(x).

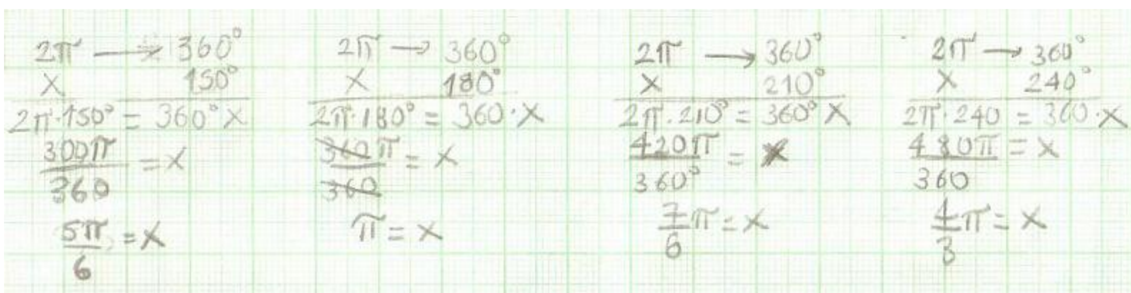
En este sentido estos estudiantes construyeron la función cos(x) sin realizar una asociación entre conceptos como arco, cateto, radian, etc. y procedimientos tales como la conversión de grados a radianes.

NIVEL 2: ORDENACIÓN O CLASIFICACIÓN.

Los estudiantes realizan la construcción de la función cos(x) estableciendo relaciones entre diversos elementos que la componen. Entienden los significados de las definiciones (arco, radian, ángulo, rectas paralelas, entre otros). Realizan procedimientos matemáticos para determinar la equivalencia entre grados y radianes para determinados ángulos. Realizan procedimientos geométricos y de dibujo para determinar la curvatura que representa la función cos(x).

Los jóvenes determinan la relación existente entre la abertura del ángulo y la longitud de arco de circunferencia. Teniendo esto en cuenta dividen la circunferencia en secciones de a 30^o y realizan cálculos acerca de la equivalencia en radianes de estos grados por medio de una regla de tres simple.

Figura 42. Conversión grados a radianes.

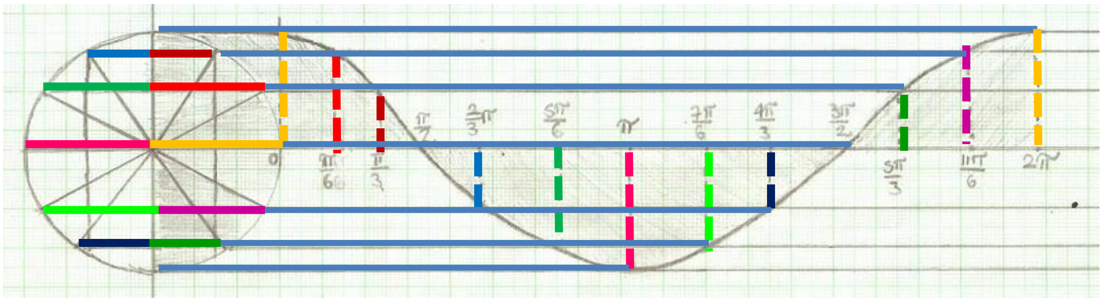


Fuente: estudiantes.

Los estudiantes realizan la conversión de 30^o a $\frac{\pi}{6}$ y realizan el mismo procedimiento utilizado para la construcción de la función sen(x), para el cálculo de los ángulos faltantes hasta $2\pi = 360^o$. Así pues logran relacionar el concepto de arco y su proyección en el eje x medida en radianes.

Geométricamente los jóvenes lograron comprobar la razón por la cual se trazaban rectas paralelas al eje x. Identificaron que la longitud de la hipotenusa intersecaba un punto en la circunferencia. A partir de este punto determinaban la altura del cateto adyacente al ángulo y por ende la amplitud que tomaría la función cos(x). En este punto los estudiantes argumentaron que a cada longitud de cateto en el eje x dado por el ángulo de abertura le correspondería una longitud de arco respectiva en radianes. Por esta razón a cada proyección representada con una línea punteada le corresponde una única recta paralela.

Figura 43. Construcción función cos(x).



Fuente: autores.

A continuación se muestra el cuadro resumen de los niveles alcanzados por los estudiantes durante la séptima actividad.

Tabla 16. Niveles de los estudiantes séptima actividad.

	ACTIVIDAD 7			
ESTUDIANTE	0	1	2	3
E1	X	X		
E2	X	X	X	
E3	X	X		
E4	X	X	X	
E5	X	X	X	
E6	X	X	X	
E7	X	X	X	
E8	X			
E9	X	X	X	
E10	X	X		
E11	X	X	X	

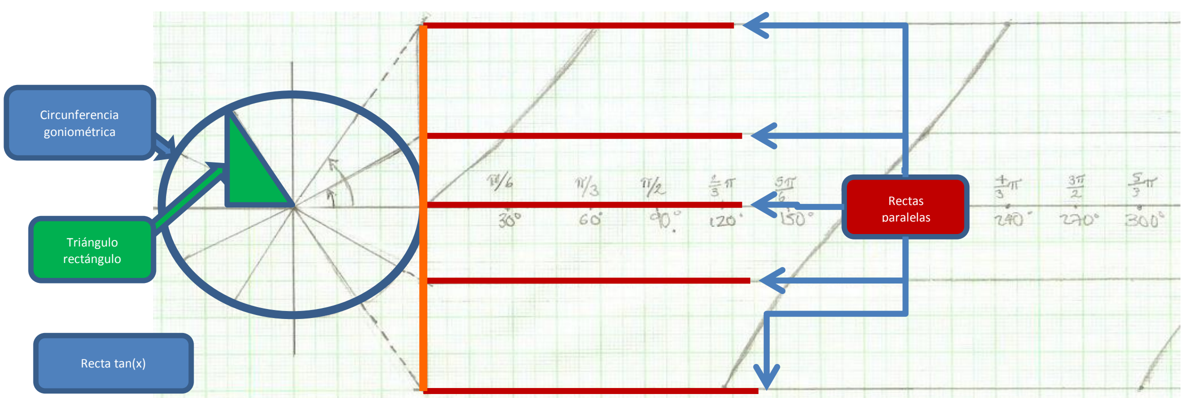
Durante el desarrollo de la sexta actividad la mayoría de estudiantes alcanzaron el nivel 2. Los estudiantes utilizan ideas previas y preconceptos acerca de las razones trigonométricas y conversión de grados a radianes para la construcción de la función cos(x). Identifican los elementos que la componen y sus variaciones, contracciones y dilataciones partiendo de su estructura.

5.8 ACTIVIDAD 8. CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN TAN(X).

NIVEL 0: VISUALIZACIÓN O RECONOCIMIENTO.

El propósito de esta actividad consistía en construir la función trigonométrica tan(x). El procedimiento a utilizar es básicamente el mismo que se usó para la construcción de la función sen(x) y cos(x). Los estudiantes identificaron que la función tan(x) varia respecto de la función sen(x) y cos(x) en su estructura, propiedades y elementos. Identificaron que se trazaba una línea perpendicular, de la cual se desprendían una seria de rectas paralelas donde se ubicarían los puntos por donde se trazaría la función tan(x).

Figura 44. Visualización función tan(x).



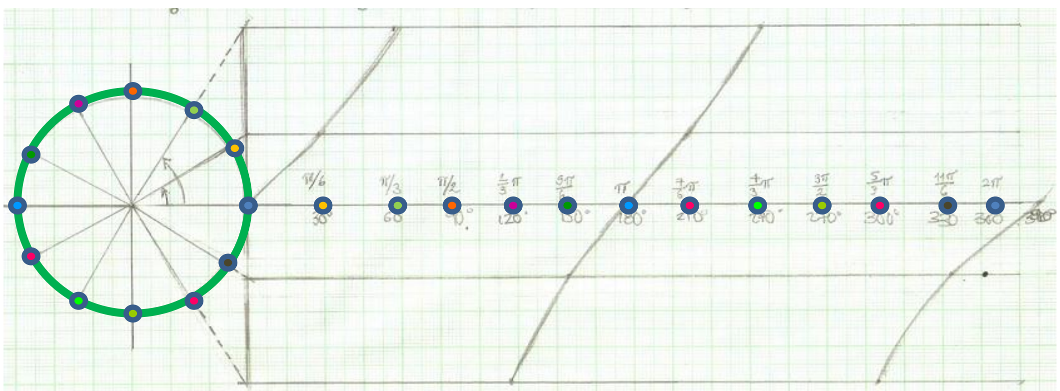
Fuente: autores.

NIVEL 1: ANÁLISIS.

Los jóvenes perciben propiedades de la función tan(x), pero no logran relacionar unas con otras. Poseen dificultades para comprender el concepto de recta tan(x); por esa razón no asocian él porque de aquella recta perpendicular al eje x y tan(x) a la circunferencia goniométrico. Siguiendo las pautas dadas por el docente los estudiantes proyectan la longitud de la hipotenusa hacia la recta tan(x) ubicando un punto en esta.

Los estudiantes trazan rectas paralelas al eje x y evidencian, que a medida que se acercan al ángulo de 90^o no existe una recta que corte a la recta tan(x) y que por tanto no abra un punto en esta, para posteriormente trazar una recta paralela. Los jóvenes continúan el proceso y trabajan con ángulos para los cuales la función tan(x) si está determinada.

Figura 45. Ejemplo elaboración función tan(x).



Fuente: autores.

Los jóvenes no logran hacer asociaciones entre conceptos y construyen la gráfica como un ejercicio mecánico.

NIVEL 2: ORDENACIÓN O CLASIFICACIÓN.

Describen los objetos y figuras de manera formal. A partir de esto los jóvenes identifican los elementos necesarios para la construcción de esta función. Observan como la proyección de la hipotenusa a la recta tan(x) varía dependiendo de la abertura del ángulo. Determinan que la medida del ángulo de abertura es proporcional a la separación de las rectas paralelas, las cuales son referencia para la construcción de la función.

Entienden los significados de las definiciones. Comprenden el concepto de recta tan(x), radian, arco, recta paralela, etc. y las aplican para realizar un esquema aceptable de la función tan(x).

Reconocen como algunas propiedades derivan de otras. Los estudiantes explican y argumentan sus ideas sobre las variaciones del segmento de recta que se proyecta desde la hipotenusa hasta intersecarse con la recta tan(x) a la circunferencia. Partiendo de este análisis los estudiantes determinan que para valores de la forma $x = \frac{n\pi}{2}$ con n entero impar la función no está definida.

Figura 46. Construcción función tan(x).

Fuente: autores.

A continuación se muestra el cuadro resumen de los niveles alcanzados por los estudiantes durante la octava actividad.

Tabla 17. Niveles de los estudiantes octava actividad.

	ACTIVIDAD 8			
ESTUDIANTE	0	1	2	3
E1	X	X		
E2	X	X		
E3	X	X	X	
E4	X	X		
E5	X	X	X	
E6	X	X	X	

E7	X	X	X	
E8	X			
E9	X	X		
E10	X	X	X	
E11	X	X		

Durante el desarrollo de la sexta actividad la mayoría de estudiantes alcanzaron el nivel 2. Los estudiantes utilizan ideas previas y preconceptos acerca de las razones trigonométricas y conversión de grados a radianes para la construcción de la función tan(x). Identifican los elementos que la componen y sus variaciones, contracciones y dilataciones partiendo de su estructura.

6. CONCLUSIONES

Las diferentes formas de razonar de los estudiantes muestran que dependiendo de las actividades propuestas, los procesos matemáticos de descripción, definición y demostración están presentes en sus actuaciones y en los trabajos elaborados. Los procedimientos desarrollados, mediante la implementación de las actividades, permitieron a los estudiantes avanzar en sus niveles de razonamiento, se pudo observar que mediante la descripción de los archivos, los estudiantes fueron generalizando propiedades y usando definiciones que los llevaron a adquirir habilidades en la demostración. A pesar que las actividades no se pudieron desarrollar en su totalidad, debido a que el proceso de aprendizaje y de desarrollo de habilidades de descripción, definición y demostración se hizo en un contexto de clase normal de una institución de carácter oficial, en donde la mayoría de estudiantes tiene deficiencias en los conceptos y procesos, pre-requisitos para el estudio de las razones y las funciones trigonométricas, los estudiantes mostraron importantes avances en sus razonamientos si se compara con anteriores cursos en los cuales no habían recibido la formación necesaria en Geometría, ni habían desarrollado los procesos que se trabajaron.

Inicialmente los estudiantes mostraron algunas dificultades en el análisis de las talleres propuestos, debido a que trataban de justificar sus procedimientos basados en argumentos visuales, pero en la medida que avanzaron en la realización de las actividades se concientizaron de la necesidad de usar definiciones y argumentar de manera lógica las situaciones planteadas.

Por otra parte, se puede concluir que el uso de la tecnología favoreció el análisis, la generalización, la deducción, y en especial, la relación entre conceptos y la generación de ideas, ya que los archivos se convirtieron en una herramienta de aprendizaje, lo cual facilitó la reflexión y comunicación de ideas entre estudiantes y, entre alumnos y profesor, este último, enfocando a los aprendices a la construcción de los conocimientos matemáticos. Esto permitió enfatizar la elaboración de descripciones, definiciones, construcción y validación de conjeturas y demostraciones y el descubrimiento de propiedades. Pero sobre todo, se rescató una idea, que el estudiante es responsable de su propio aprendizaje; de manera que el valor de la herramienta se incrementó en la medida que se empleaba, al hacer posible un rango mayor de ideas matemáticas, con más formas para representarlas y manipularlas. Este hecho también se acomodó a las diferentes formas de aprendizaje, debido a que los estudiantes podían utilizar las diversas representaciones que les ofrecía el software; esto les ayudó a desarrollar distintas maneras de pensar acerca de las tareas propuestas e independizarse de la tecnología.

Con los resultados encontrados se confirma que la tecnología por sí misma no logra el objetivo, es el docente quien enfoca al estudiante para que mediante la observación, el análisis, la producción de conjeturas y la elaboración de demostraciones, avance en su nivel de razonamiento. De ahí que si un estudiante se encuentra en el primer nivel de razonamiento, se queda en la parte estática del archivo, pero si el profesor lo motiva y cuestiona adecuadamente, entonces es necesidad del uso y la formulación de la teoría en la búsqueda de las justificaciones teóricas para la solución de los problemas propuestos. Esta forma de utilizar la tecnología requiere una correcta preparación de los docentes para diseñar y aplicar actividades en las cuales se busca desarrollar procesos y ayudar a los estudiantes a avanzar en sus niveles de razonamiento.

Producto de este trabajo no sólo se elaboró una unidad didáctica para la enseñanza de las funciones trigonométricas en la educación media utilizando el modelo de Van Hiele como era el objetivo planteado, sino que además, con la organización detallada de la unidad según las fases del Modelo, permitió al docente comprender cómo se debían orientar las actividades respecto a cada proceso y a las actuaciones de los estudiantes para motivar a los que necesitaban mayor asesoría y a su vez identificar a los que estaban avanzando más rápidamente. Se resalta que la fase de orientación dirigida enfocada al desarrollo de los procesos fue básica para que los estudiantes lograran desarrollar los contenidos y para que estructuraran su trabajo de modo que se hicieran visibles las descripciones, definiciones y demostraciones elaboradas y la fase de explicitación también contribuyó al logro de los objetivos de aprendizaje y se constituyeron en una nueva fuente de motivación y participación para los integrantes del grupo gracias al compromiso de cada uno en la realización de las actividades propuestas; además la fase de explicitación fue una clave para que los estudiantes observaran y comprendieran otras formas de demostración, aprendieran vocabulario, aumentaran sus intervenciones y mejoraran en la producción de sus argumentaciones.

7. RECOMENDACIONES

Es importante que los profesores de matemáticas que orientan geometría, reconozcan el tipo de dificultades a las que se pueden enfrentar sus estudiantes a la hora de realizar el estudio de cada uno de los objetos matemáticos, y de esta manera reconocer diversas estrategias que permitan un apoyo eficaz y aportes significativos en la superación de dichas falencias.

En el diseño de la propuesta didáctica se empleó un software de geometría dinámica. En ese sentido se recomienda el diseño y la implementación de un taller de entrada a la herramienta computacional.

Los docentes que decidan usar esta metodología de enseñanza, deben revisar previamente y en forma exhaustiva las bases filosóficas, psicológicas y procedimentales de la Teoría de Van Hiele.

Los instrumentos de evaluación deberán ser desarrollados tomando en cuenta las diferentes actividades realizadas y los procesos de visualización, construcción y discursivos que encierra el razonamiento geométrico de un estudiante.

Dentro del marco de ejecución de un proyecto como este, siempre se desea que haya una mejora continua, es por eso que se recomienda a futuros estudiantes que tengan interés en el proyecto, la complementación del mismo teniendo en cuenta especialmente el desarrollo de las actividades propuestas.

BIBLIOGRAFÍA

ALGARÍN, D. L. Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. (Tesis de maestría) Bucaramanga, 2013.

BARRANTES M, La geometría y la formación del profesorado en primaria y secundaria. Universidad Extremadura, 1998.

BIENESTAR INSTITUCIONAL, UNISANGIL. ¿Con cuáles objetos de aprendizaje cuento? http://bienestar.unisangil.edu.co/index.php/academico/objetos-virtuales-de-aprendizaje/37-con-cuales-objetos-virtuales-de-aprendizaje-cuento [Recuperado: 14 de noviembre de 2013].

BISHOP A. Cuáles son algunos obstáculos para el aprendizaje de la geometría. 1986.

BOYER, CARL B. Historia de la matemática. 1ª edición, Madrid, Alianza Editorial, S.A., 1986.

CANTORAL, R., FARFAN, R. Desarrollo Conceptual del cálculo. Editorial Thomson.2003.

COLLETTE, J.P. Historia de las Matemáticas. 1ª edición, Madrid, Siglo XXI de España Editores, S.A. 1985.

CRITERIOS, Revista de Investigación- Universidad Mariana. Edit. Publicaciones UNIMAR. Objetos virtuales de aprendizaje (OVA) como mediadores del proceso de aprendizaje. http://asis.umariana.edu.co/RevistaCriterios/index.php?option=com_content&view=article&id=401:objetos-virtuales-de-aprendizaje-ova-como-mediadores-del-

proceso-de-aprendizaje&catid=70:revista-criterios-no-26&Itemid=225
[Recuperado: 7 de noviembre de 2013].

DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, grupo educación matemática. 1999.

FIALLO, J. Enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración, Memoria de investigación, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia. 2006.

FIALLO, J. Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia. 2010.

FIALLO, J. Enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de habilidades de la demostración. (Memoria de investigación). Universidad de Valencia, Valencia. 2006.

FREUDENTHAL, H. Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (L. Puig, Trans.). En E. Sánchez (Ed.), Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados) (2ª edición). México D.F. Departamento de Matemática Educativa. 2001.

GUTIERREZ, Á., FIALLO, J. Enseñanza de la trigonometría con ayuda de SGD. En T. Recio (Ed.), Geometría Dinámica. Madrid, España: Anaya, 2009.

Historia de la trigonometría.
http://trigonometriasonia.blogspot.com/2008/10/historia-de-la-trigonometra.html
[citado en 14 de noviembre de 2013].

HOFFER A. La geometría es más que demostración. Notas de matemática. 1990.

JANVIER, C. Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale N.J.: Lawrence Erlbaum Associates. 1987.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Lineamientos curriculares. Área de matemáticas.* Cooperativa Editorial MAGISTERIO. 1998.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL (MEN). Procesos generales como el razonamiento, la resolución y el planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. 1998.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales. Colombia: M.E.N. 1998.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). Estándares Básicos de Matemáticas. Colombia: M.E.N. 2003.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). Estándares Básicos de Matemáticas. Colombia: M.E.N. 2006.

NOVAK, J. D., GOWIN, D.B. Aprendiendo a aprender (Trad. J. Campanario; E. Campanario). Barcelona, España: Martínez Roca. Libros universitarios y profesionales.1998

REY PASTOR, J., BABINI, J. Historia de la Matemática. 1ª edición, Barcelona, Gedisa, S.A. 1984

SAMPER C. LEGUIZAMON C, CAMARGO L. Razonamiento en geometría Revista EMA. Vol 6, No 2.

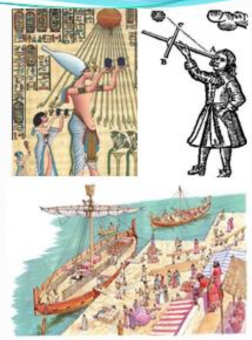
VAN HIELE, P. M. El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría). (Tesis doctoral). Universidad de Utrecht, Utrecht (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

ANEXOS

ANEXO 1. ACTIVIDAD 1 HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA.

Los babilonios y los egipcios hace mas de 3000 años fueron los primeros en utilizar los ángulos de un triangulo y las razones trigonométricas para efectuar medidas en agricultura y para la construcción de pirámides

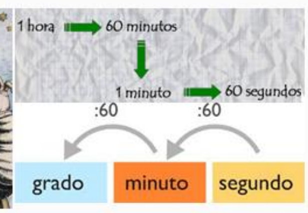
También se desarrollo a partir de los esfuerzos hechos para avanzar en el estudio de la astronomía y para mejorar la exactitud en la navegación y en el calculo del tiempo y los calendarios.



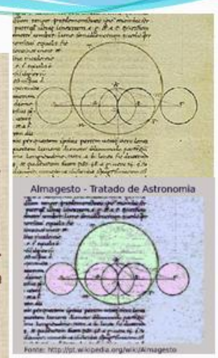
Desarrollada por los egipcios

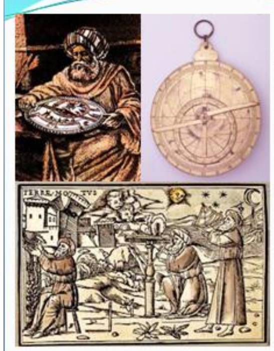
Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos.
En el siglo II a. c, el astrónomo griego Hiparco de Nicea compilo una tabla trigonométrica para resolver triángulos. Esta tabla es similar a la moderna tabla del seno.

300 años mas tarde el astrónomo Tolomeo utilizo r=60, pues los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los babilonios.



Durante muchos siglos, la trigonometría de Tolomeo fue la introducción básica para los astrónomos. El libro de astronomía el Almagesto (escrito por el) también tenia una tabla de cuerdas junto con la explicación de su método para compilarla, y a lo largo del libro dio ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triangulo a partir de los conocidos.

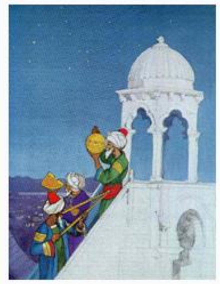




A finales del siglo VIII los astrónomos Árabes trabajaron con la función seno y a finales del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones.

También descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría tanto para triángulos planos como esféricos.
Los matemáticos sugirieron el uso del valor r=1 en vez de r= 60, y esto dio lugar a los valores modernos de las Funciones trigonométricas.

Trigonometría en occidente.

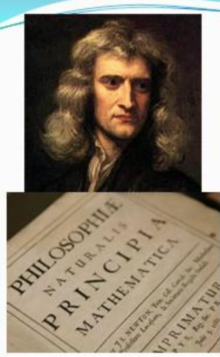


El occidente latino se familiarizo con la trigonometría Árabe a través de traducciones de libros de Astronomía arábigos, que comenzaron a aparecer en el siglo XII.

El primer trabajo importante fue "De Triangulus" escrito por el alemán Johann Muller.
El astrónomo Georges Joachim, introdujo el concepto moderno de Funciones trigonométricas como proporciones en vez de longitudes de ciertas líneas.

Trigonometría moderna

A principios del siglo XVII, el matemático John Napier invento los logaritmos y gracias a esto los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje.



A mediados del siglo XVII Isaac Newton invento el calculo diferencial e integral. Uno de los fundamentos del trabajo de Newton fue la representación de muchas funciones matemáticas utilizando series infinitas de potencias de la variable x.

Newton encontró la serie para el sen x y series similares para el cos x y la tg x,. Con la invención del calculo las funciones trigonométricas fueron incorporadas al análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.


Por ultimo, en el siglo XVII, el matemático Leonhard Euler demostró que las propiedades de la trigonometria eran producto de la aritmética de los números complejos y además definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos.
Im
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$
i
$\sin\varphi$
φ
0
$\cos\varphi$
1
Re
LEONHARD EULER
1707–1783
HELVETIA
130
ANGELO BOOG
2007

ANEXO 2. ACTIVIDAD 2 REVISIÓN DE GUÍA “DEFINICIÓN Y CAMPOS DE APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA.

Nombres y apellidos ______________________________ ***Grado*** _____ ***fecha*** _________

Aplicaciones de la trigonometría.

Cuáles son las aplicaciones de la trigonometría en la vida cotidiana en áreas como:

Física: ____

____

____

Juegos: ____

____

____

Geografía ____

____

____

Electricidad/electrónica ____

____

Construcción ____

____

Cartografía ____

____

Topografía: ____

____

Astronomía ____

____

ANEXO 3. ACTIVIDAD 3 OBSERVACIÓN DEL VIDEO INTERACTIVO “COMO MIDIÓ EL RADIO DE LA TIERRA ERATÓSTENES”.

¿Cómo midió Eratóstenes el radio de la Tierra?.

Una vez llevada a cabo la exposición y la participación de los estudiantes, se proyecta el video http://www.youtube.com/watch?v=mPPb7EJSZ9w ¿Cómo midió Eratóstenes el radio de la Tierra?, mostrando a los estudiantes una antigua pero clara aplicación de la trigonometría en la medición de distancias, y para evidenciar que los jóvenes hayan puesto atención a este video, se pasara a alguno de ellos para que desarrolle el mismo análisis que llevo a cabo Eratóstenes hace más de 14 siglos.

ANEXO 4. ACTIVIDAD 4 DESARROLLO DE LA GUÍA “CIRCUNFERENCIA Y SÓLO”.

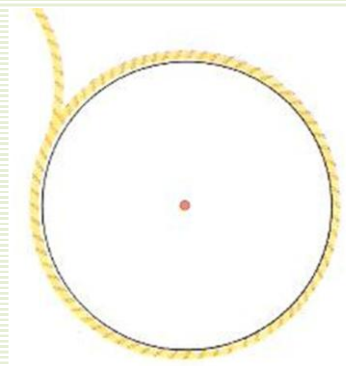
SITUACIÓN 1. LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA.

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA.

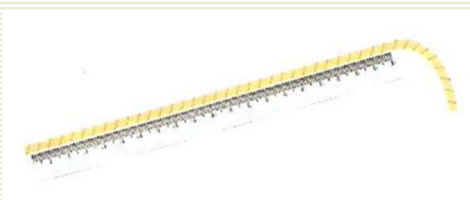
La **longitud de la circunferencia** L se determina mediante la expresión:

Donde *r* es el radio de la circunferencia y

Paso 1.



Paso 2.



Paso 3.

$$\frac{L}{d} = \frac{31,41\ \text{cm}}{10\ \text{cm}} \approx 3,141$$

Paso 4.

Para deducir la expresión $L = 2\pi r$, se realizan los siguientes pasos:

1. Se traza una circunferencia de 5 cm.
2. Se coloca una cuerda sobre la circunferencia.
3. Se mide la longitud de la cuerda.
4. Se divide la medida de la cuerda entre el diámetro de la circunferencia.

Al realizar el mismo procedimiento con circunferencias de diferentes radios se obtiene que la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es siempre la misma. Este valor constante es el número *pi* caracterizado por ser un número decimal no periódico infinito, es decir, un número irracional.

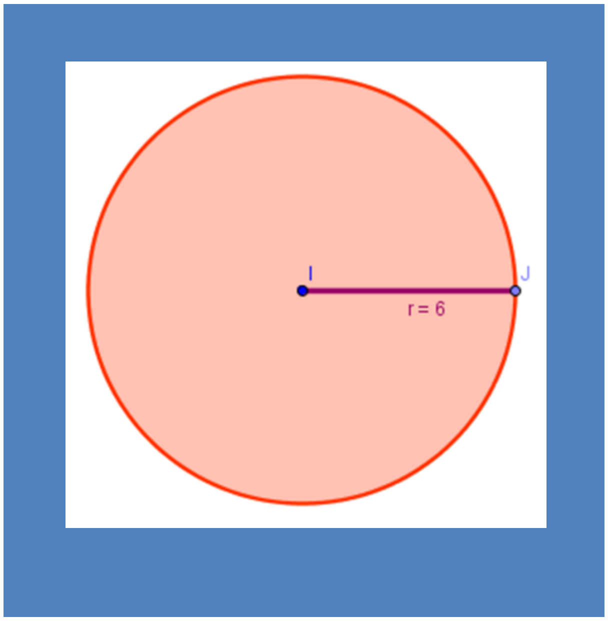
El número *pi* se simboliza con la letra griega π y su valor aproximado es $\pi = 3{,}1415926\ldots$ aunque generalmente sólo se utilizan las dos o tres primeras cifras decimales del número. Así, $\pi \approx 3{,}14$.

Como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro es igual a π se escribe:

$\frac{L}{d} = \pi$. Luego, se despeja *L*, con lo cual $L = d\pi$. Finalmente, se remplaza *d* por *2r*, donde *r* es el radio de la circunferencia, de donde se obtiene:

$$\boldsymbol{L = 2\pi r}$$

Ejemplo. Se quiere colocar una cinta alrededor de una superficie circular de radio 6 m. ¿Cuántos metros de cinta se necesitan?



Para encontrar la cantidad de cinta, se halla la longitud de la circunferencia de radio.

Como $L = 2\pi r$ se remplaza el radio y se realizan las operaciones indicadas así:

$$L \approx 2 \ 3{,}14 \ 6$$

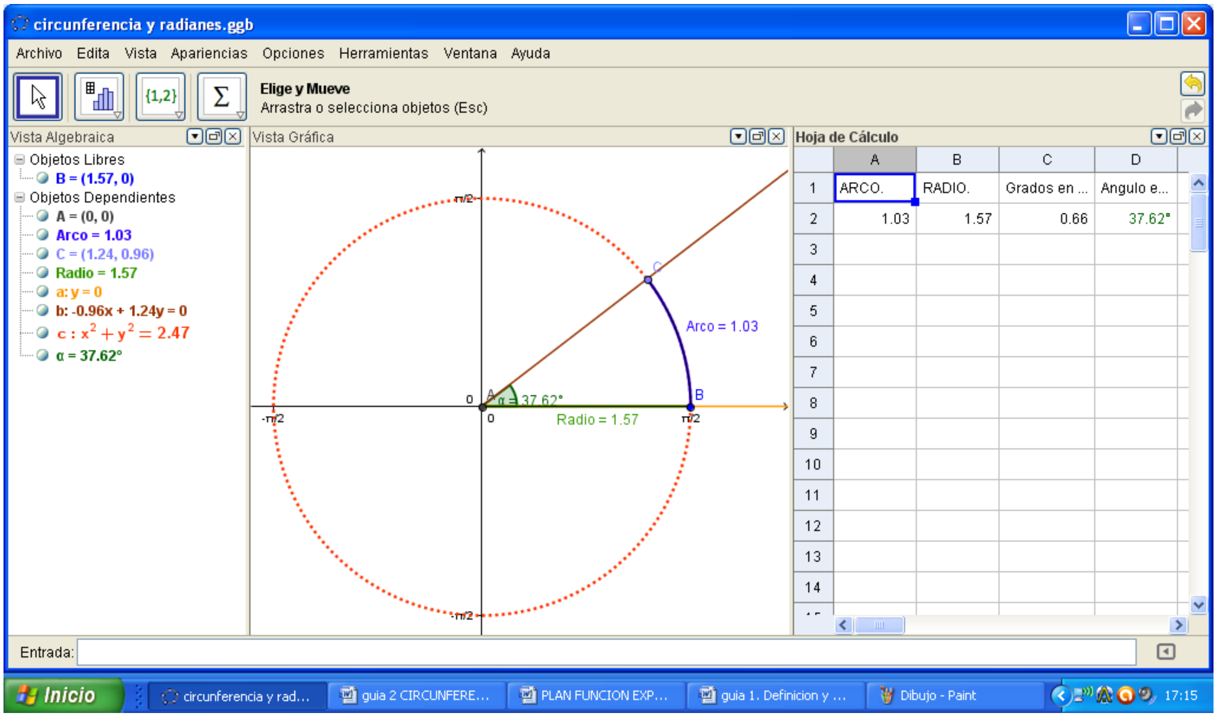
$$L \approx 37{,}68$$

Por tanto, la cantidad de cinta que se requiere es aproximadamente 37,68 m.

SITUACIÓN 2. CONVERSIÓN DE GRADOS A RADIANES Y DE RADIANES A GRADOS CON EL PROGRAMA GEOGEBRA.

Conversión de grados a radianes y de radianes a grados en el programa Geogebra.

Los grados y los radianes son dos diferentes sistemas para medir ángulos. Un ángulo de 360 grados equivale a 2π radianes; un ángulo de 180 grados equivale a π radianes (recordemos que el número π = 3.14159265359…).



Utilizando el corrimiento del punto C, la abertura del arco y la hoja de cálculo convertir los siguientes ángulos en grados a radianes:

a. 0, 90, 180, 270 y 360 grados.

b. 45, 135, 225 y 315 grados.

c. 30, 60, 120 y 150 grados.

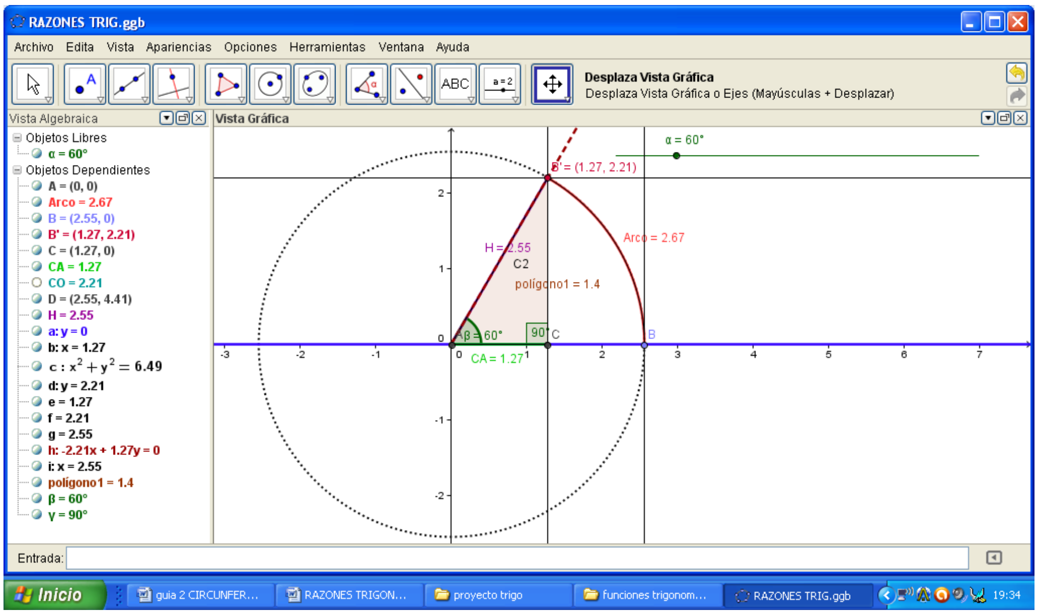
Convertir los siguientes radianes a grados:

a. π/2, π, 3π/2 y 2π rad

b. π/4, 3π/4, 5π/4 y 7π/4

ANEXO 5. ACTIVIDAD 5. DESARROLLO DE LA GUÍA “RAZONES TRIGONOMÉTRICAS”.

Con ayuda del programa Geogebra resolver los siguientes problemas:



1. En el momento del día en que los rayos del sol forman un ángulo de 60 grados con la horizontal, la sombra que proyecta un árbol en el suelo es de 2,6 m.

¿Cuánto mide el árbol?

2. Unas cigüeñas construyen su nido sobre el tejado de un edificio a 25 m del suelo. Un niño lo observa desde un punto situado a 50 m del edificio.

Calcula el ángulo de observación.

3. El tronco de una palmera mide 3,5 m y crece de forma inclinada debido al peso de la parte superior. la perpendicular desde su parte más alta hasta la tierra mide 2 m.

Calcula el ángulo de inclinación del tronco respecto a la vertical.

ANEXO 6. ACTIVIDAD 6 CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SEN(X).

SITUACIÓN 1: APLICACIONES DE LA FUNCIÓN SEN(X).

¿Cómo se evidencia la función sen(x) en el estudio de las ondas de radio?

Para mayor información puedes dar click aquí: http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/Ibarrola/3ro.htm.

¿Cómo se evidencia la función sen(x) en el estudio de los terremotos y las ondas que se propagan en el agua? Explica:

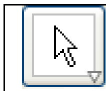
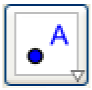
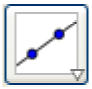
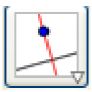
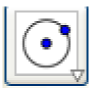
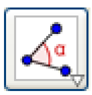
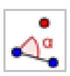
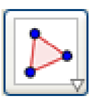
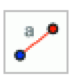
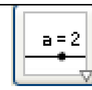
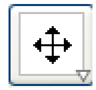
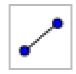
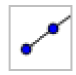
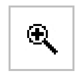
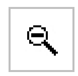
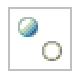
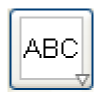
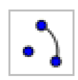
Para mayor información da click aquí: http://www.slideshare.net/leidyhm/material-didctico-para-funciones-y-sus-aplicaciones

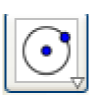
SITUACIÓN 2: CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN SEN(X) EN EL PROGRAMA GEOGEBRA.

CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCION SEN(X) EN EL PROGRAMA GEOGEBRA.

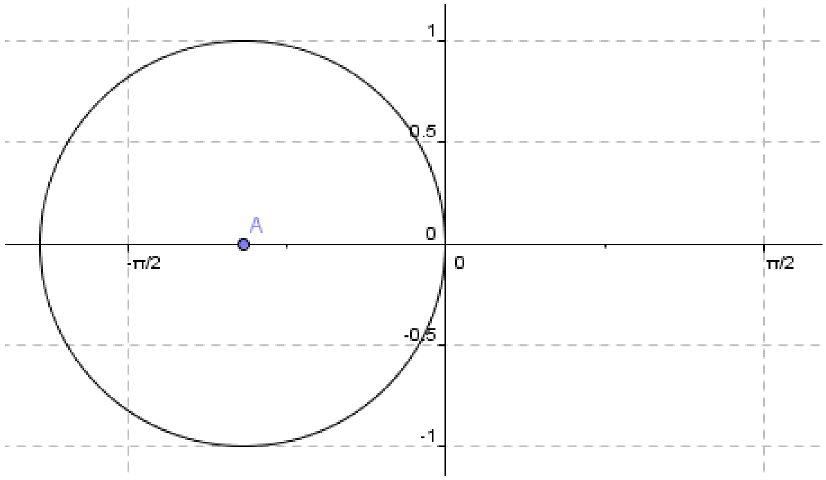
El programa Geogebra, además de construir figuras, nos permite comprobar propiedades geométricas. A partir del movimiento de objetos de una construcción inicial (puntos, rectas, polígonos…), se obtiene otra construcción distinta en la que se puede verificar si se mantiene la propiedad estudiada.

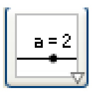
Para ello se van a utilizar las siguientes opciones del menú de la barra de herramientas.

 **Selecciona y desplaza objetos.**  **Nuevo punto.**  **Recta que pasa por dos puntos.**  **Recta perpendicular.**  **Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos.**  **Ángulo.**  **Ángulo dada su Amplitud.**  **Polígono.**  **Segmento dados punto extremo y longitud.**	 **Deslizador.**  **Desplaza Vista Gráfica.**  **Segmento entre dos puntos.**  **Semirrecta que pasa por dos puntos.**  **Zoom de acercamiento.**  **Zoom de alejamiento.**  **Expone/ Oculta objeto.**  **Inserta texto.**  **Arco de circunferencia con centro entre dos puntos.**

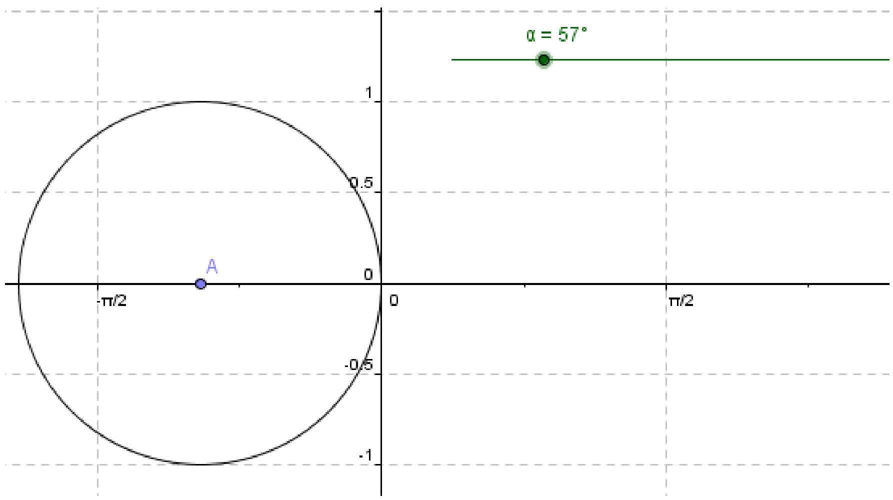
 Circunferencia unitaria o sólo trigonométrico de radio 1/ Circunferencia dado su centro y uno de sus puntos.

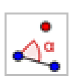
Vamos a elegir el centro que este con la coordenadas (-1,0) y el punto para el radio en todo el origen del plano cartesiano en las coordenadas (0,0).





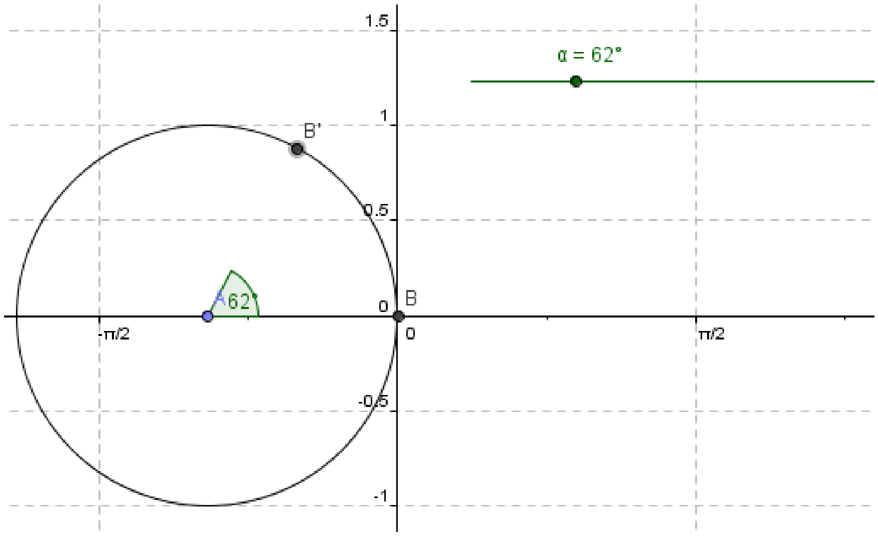
Deslizador /ángulo/deslizador/ancho 360/aplica.

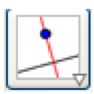


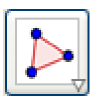


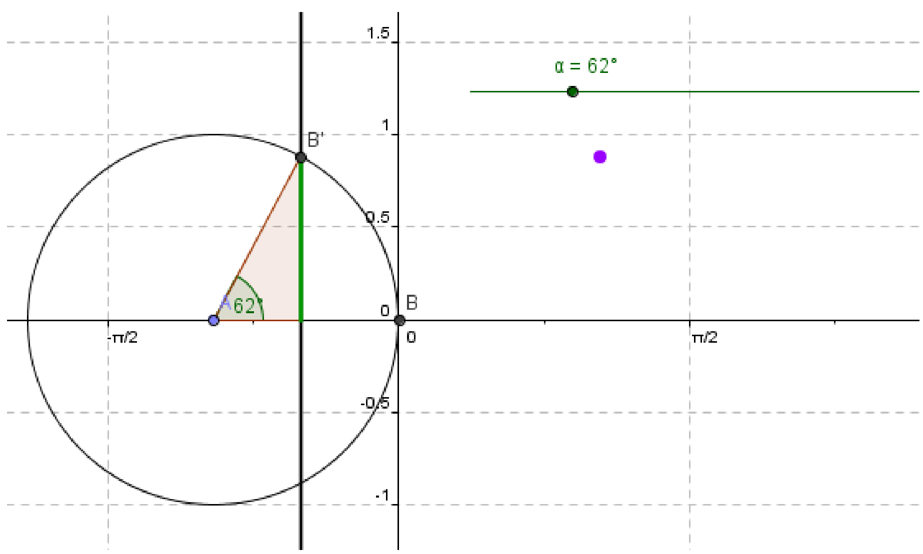
Click en el cuadro de opción ángulo/ ángulo dada su amplitud.

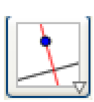
Click izquierdo en el punto B, luego en el punto A, automáticamente aparecerá un recuadro. En este cambiamos la opción 45^o por α y dejamos la opción sentido anti horario como esta. Aparecerá un ángulo, el cual al mover el punto del deslizador este variara en la circunferencia.

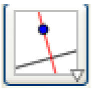


 Click recta perpendicular y le damos click en el punto B’ y en el eje de las x.

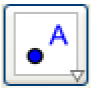
 Click en polígono y le damos click a el punto A, B’, C y luego A otra vez, aparecerá una zona sombreada formando un triángulo rectángulo.



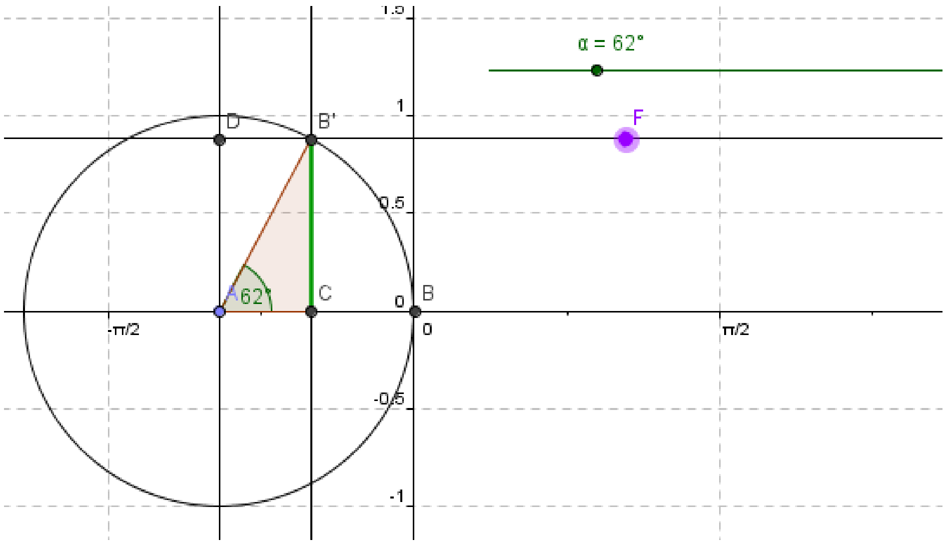
 Recta perpendicular B’ y eje y.

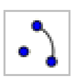


Recta perpendicular A y eje x.

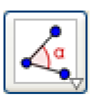


Crear punto D en la intersección de las rectas antes realizadas.

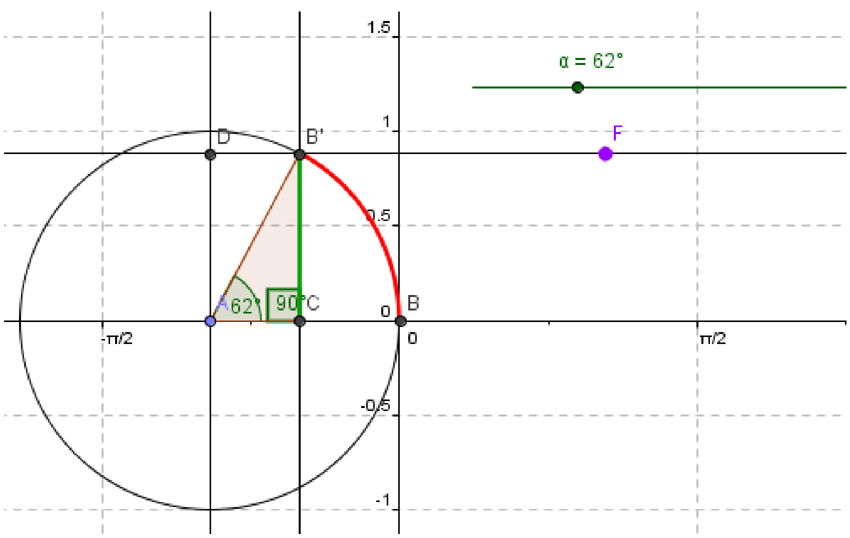


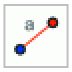


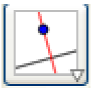
Arco de circunferencia con centro entre dos puntos/click entre A, B Y B’

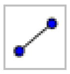


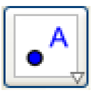
Angulo B’, C Y A

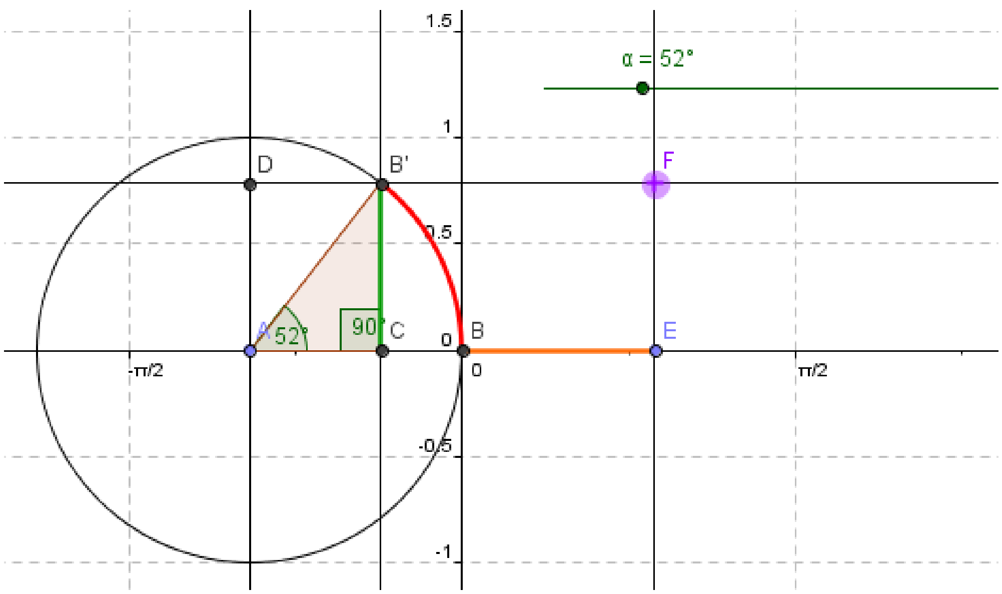


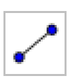
 Segmento dados punto extremo y longitud/click en el punto B/aparecerá un recuadro y le damos la distancia del arco, ejemplo e.

 Recta perpendicular y doble click en el punto E del segmento entre los dos puntos.

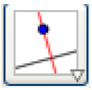
 Segmento entre dos puntos CB'.

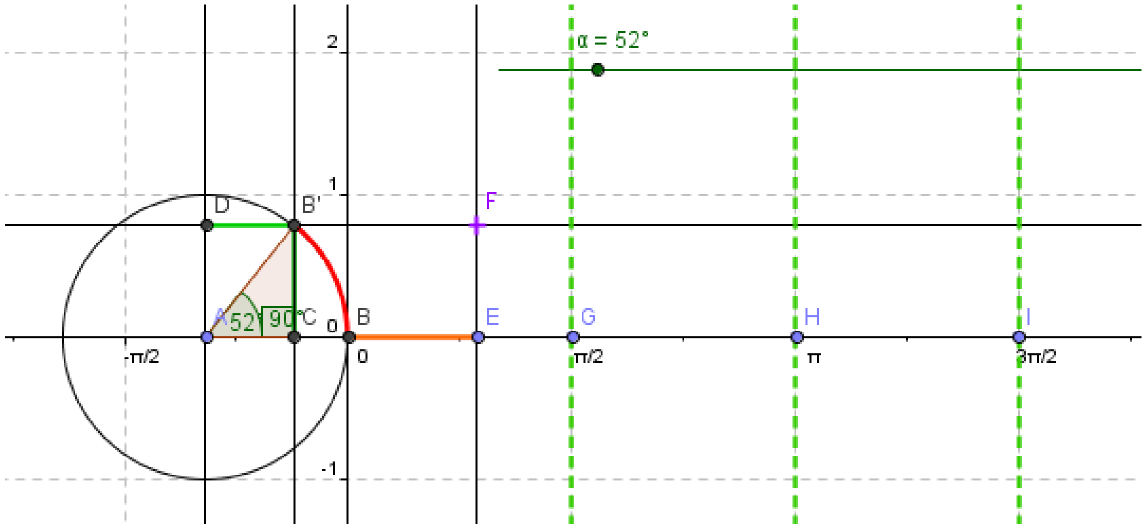
 Crear punto en la intersección de las rectas que pasan por los puntos D y E. ejemplo F.



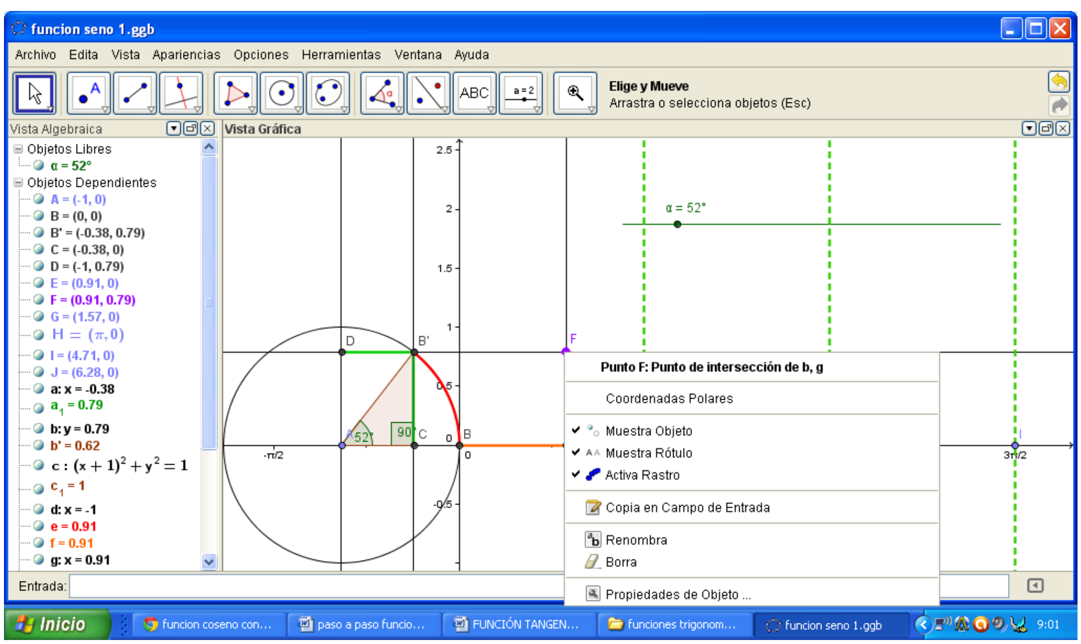
 Click en segmento entre dos puntos y damos en D y B', luego hacemos lo mismo para C y B'.

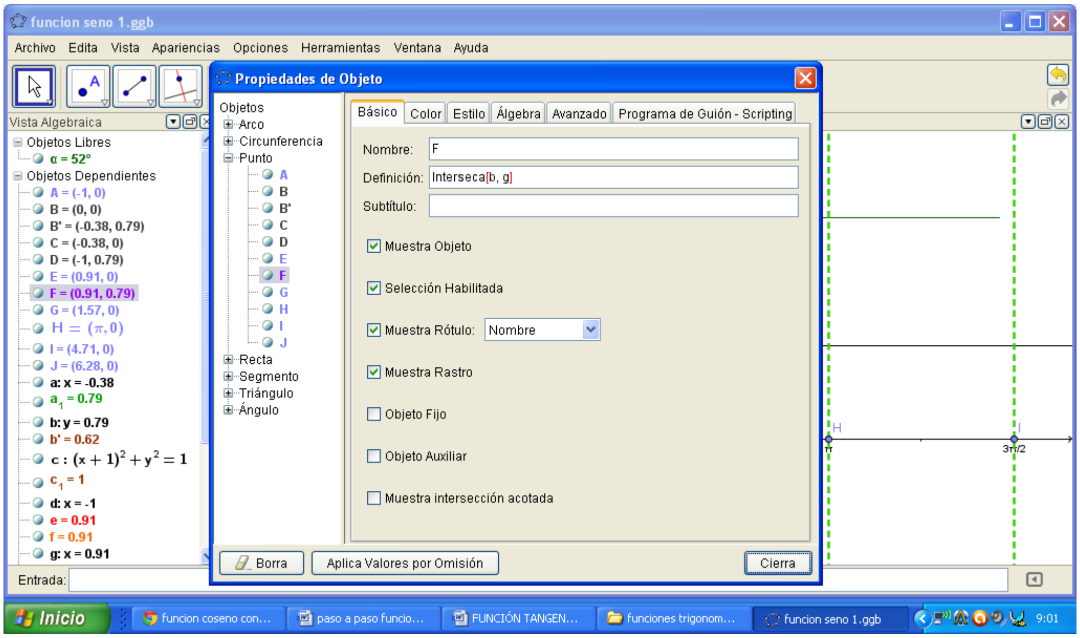
Luego damos en click derecho/ vista grafica/ eje x/ distancia/ π/2/ graduaciones/ cierra. Ahora el eje de las x aparece seccionado por partes de a π /4.

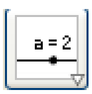
 Se trazan líneas perpendiculares en cada sección de π /2.



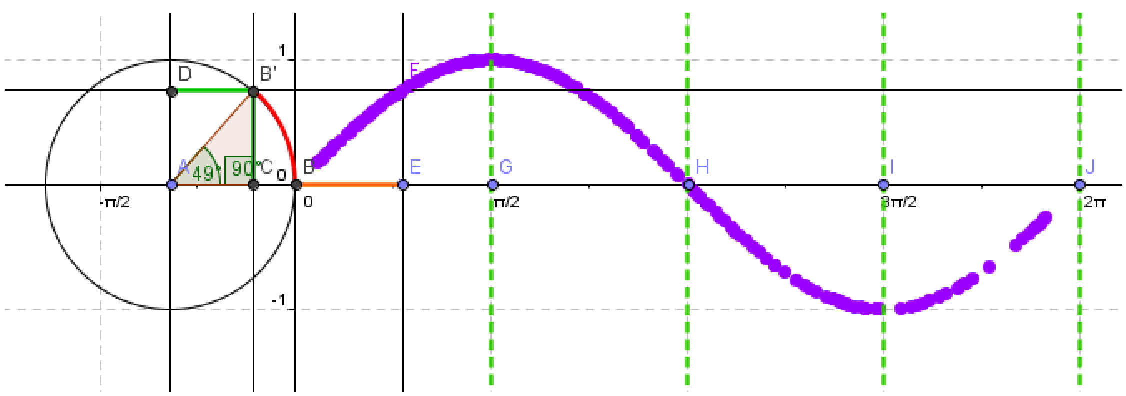
Ahora damos click derecho a F/ propiedades de objeto/ básico/ muestra rastro/ cerrar.







Luego vamos al deslizador y movemos. Se puede observar que se forma la función Sen(x).



ACTIVIDAD

- Construir la animación de la función sen(x) en el programa Geogebra.
- Identificar que elementos se deben variar para construir la función sen(x).
- ¿Cómo se mide la longitud de una circunferencia?
- ¿Qué relación existe entre el arco de una circunferencia y su ángulo?
- ¿Qué longitud representa el cateto opuesto al ángulo en la función sen(x)?

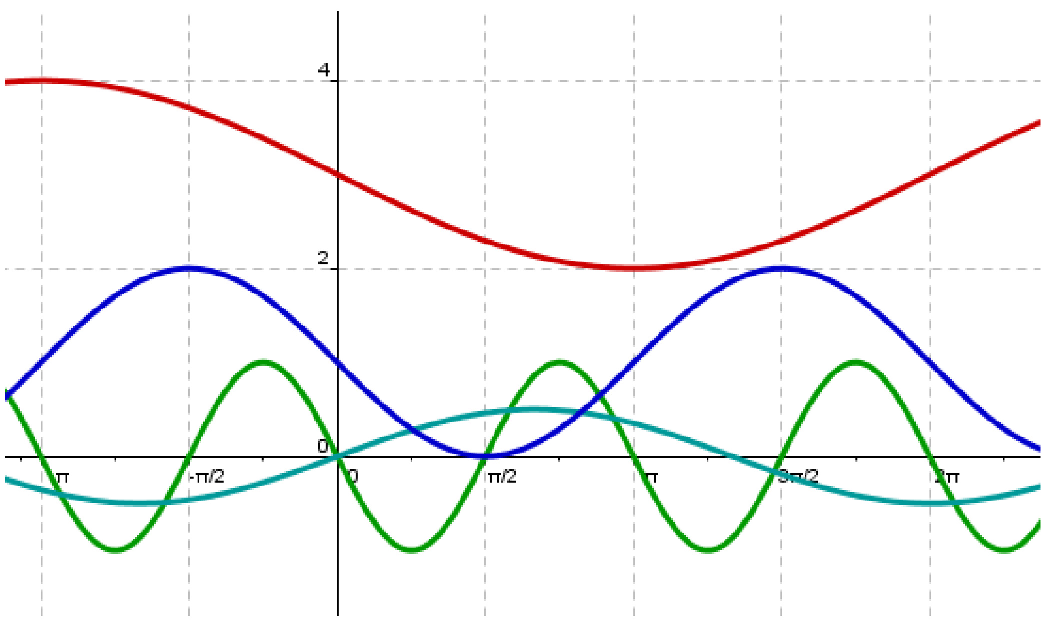
- ¿Cuál es el periodo de la función sen(x)?
- ¿Por qué la función sen(x) es acotada en el eje y y crece infinitamente en el eje de las x?

SITUACIÓN 2.1. CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN SEN(X) EN PAPEL MILIMETRADO.

Realizar la gráfica de la función sen(x) en el papel milimetrado siguiendo las indicaciones dadas en clase.

SITUACIÓN 3. ELEMENTOS DE LA FUNCIÓN SEN(X).

Realiza las siguientes gráficas en el programa Geogebra y completa el cuadro:



Gráficas de la función sen(x).

Función	Amplitud	Período	fase	Constante de fase
F(x)=sen(2x+π)				
F(x)=(1/2)sen(3x/4)				
F(x)=3-sen(x/2)				
F(x)=1+sen(x+ π)				

SITUACIÓN 4. GRÁFICAS DE LA FUNCIÓN SEN(X).

Gráficas de función Sen(x).

Por grupos los estudiantes realizaran en el programa **Geogebra** la tabla y grafica de cada función en un mismo plano cartesiano. Esto con el fin de que evidencien como varía una función respecto a otra dependiendo de su estructura.

Cada grupo pasara al tablero y expondrán sus graficas a los demás compañeros, para que estos observen como cambia una función cuando varia la amplitud, la fase, constante de fase, si se le multiplica un valor por fuera de la función, si se suma o se resta un coeficiente a la función, si la fase es dividida por un número, etc.

GRUPO 1	***Y=sen(x), y=(1/2)sen(x), y=(1/3)sen(x), y=1+sen(x), y=2+sen(x), y=3+sen(x)***
GRUPO 2	***Y=sen(x), y=sen(x+ π /2), y=sen(x+ π), y=sen(x+3 π /2), y=sen(x+2 π)***
GRUPO 3	***Y=sen(x), y=sen(2x), y=sen(3x), y=sen(x/2), y=sen(x/3)***
GRUPO 4	***Y=sen(x), y=(1/2)sen(x), y=(1/3)sen(x), y=1-sen(x), y=2-sen(x), y=3-sen(x)***
GRUPO 5	***Y=sen(x), y=sen(x-π/2), y=sen(x- π), y=sen(x-3 π/2), y=sen(x-2 π)***

ANEXO 7. ACTIVIDAD 7. CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COS(X).

SITUACIÓN 1: APLICACIONES DE LA FUNCIÓN COS(X).

¿Cómo se evidencia la función cos(x) en el estudio del movimiento armónico simple?

Para mayor información puedes dar click aquí: http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/mas/MAS_indice.htm

¿Cómo se evidencia la función cos(x) en el estudio de los terremotos y las ondas que se propagan en el agua? Explica:

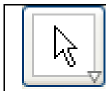
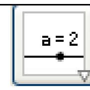
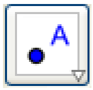
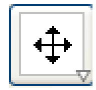
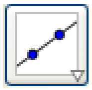
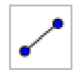
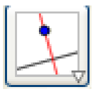
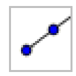
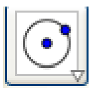
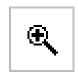
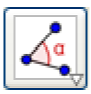
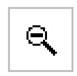
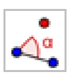
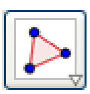
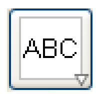
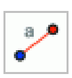
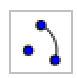
Para mayor información da click aquí: http://www.slideshare.net/leidyhm/material-didctico-para-funciones-y-sus-aplicaciones

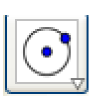
SITUACIÓN 2: CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN COS(X) EN EL PROGRAMA GEOGEBRA.

CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCION COS(X) EN EL PROGRAMA GEOGEBRA.

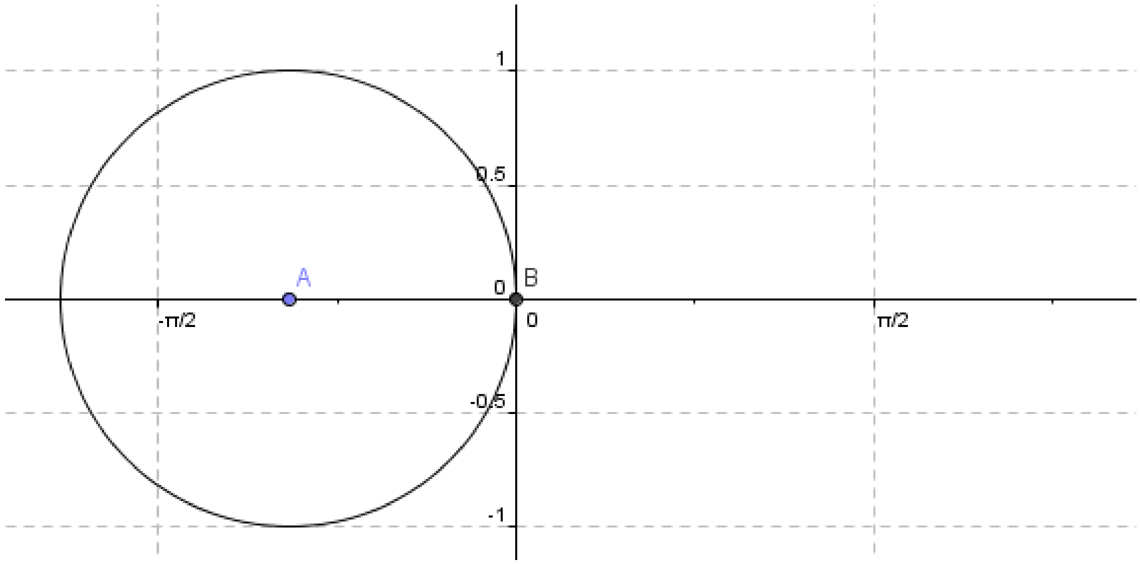
El programa Geogebra, además de construir figuras, nos permite comprobar propiedades geométricas. A partir del movimiento de objetos de una construcción inicial (puntos, rectas, polígonos…), se obtiene otra construcción distinta en la que se puede verificar si se mantiene la propiedad estudiada.

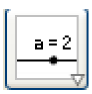
Para ello se van a utilizar las siguientes opciones del menú de la barra de herramientas.

 **Selecciona y desplaza objetos.**	 **Deslizador.**
 **Nuevo punto.**	 **Desplaza Vista Gráfica.**
 **Recta que pasa por dos puntos.**	 **Segmento entre dos puntos.**
 **Recta perpendicular.**	 **Semirrecta que pasa por dos puntos.**
 **Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos.**	 **Zoom de acercamiento.**
 **Ángulo.**	 **Zoom de alejamiento.**
 **Ángulo dada su Amplitud.**	 **Expone/ Oculta objeto.**
 **Polígono.**	 **Inserta texto.**
 **Segmento dados punto extremo y longitud.**	 **Arco de circunferencia con centro entre dos puntos.**

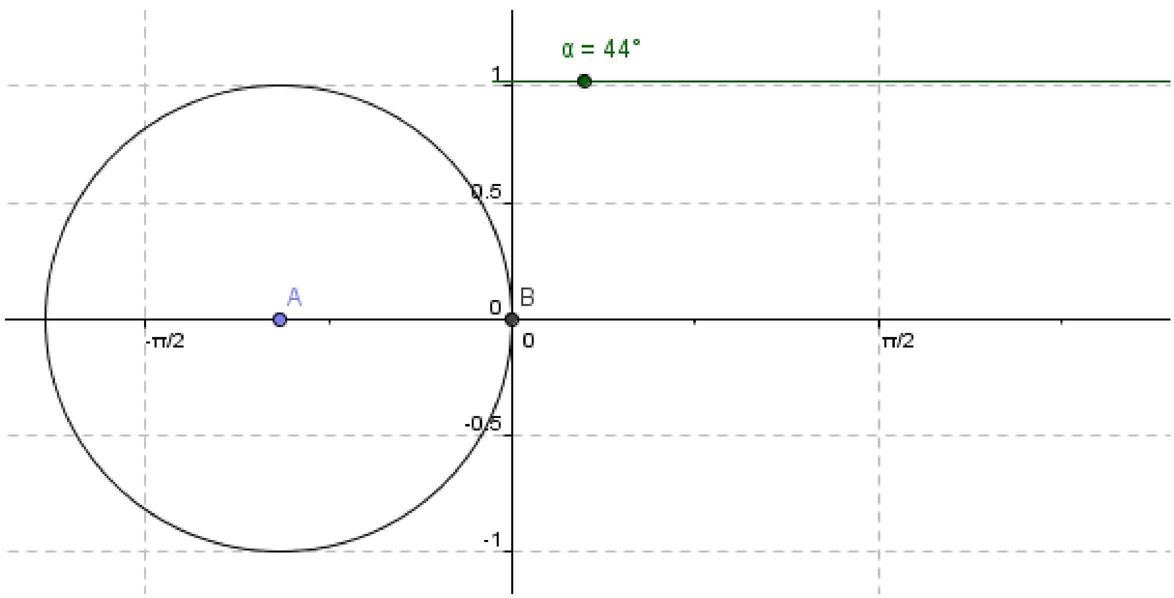
 Circunferencia unitaria o sólo trigonométrico de radio 1/ Circunferencia dado su centro y uno de sus puntos.

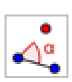
Vamos a elegir el centro que este con la coordenadas (-1,0) y el punto para el radio en todo el origen del plano cartesiano en las coordenadas (0,0).





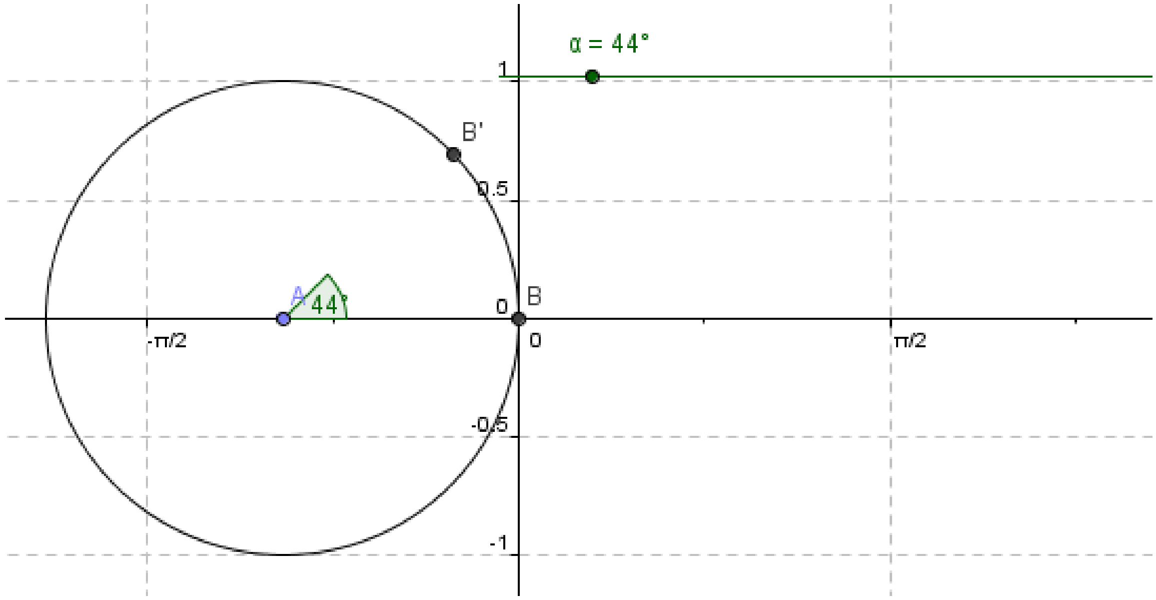
Deslizador /ángulo/deslizador/ancho 360/aplica.

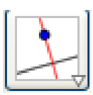


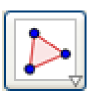


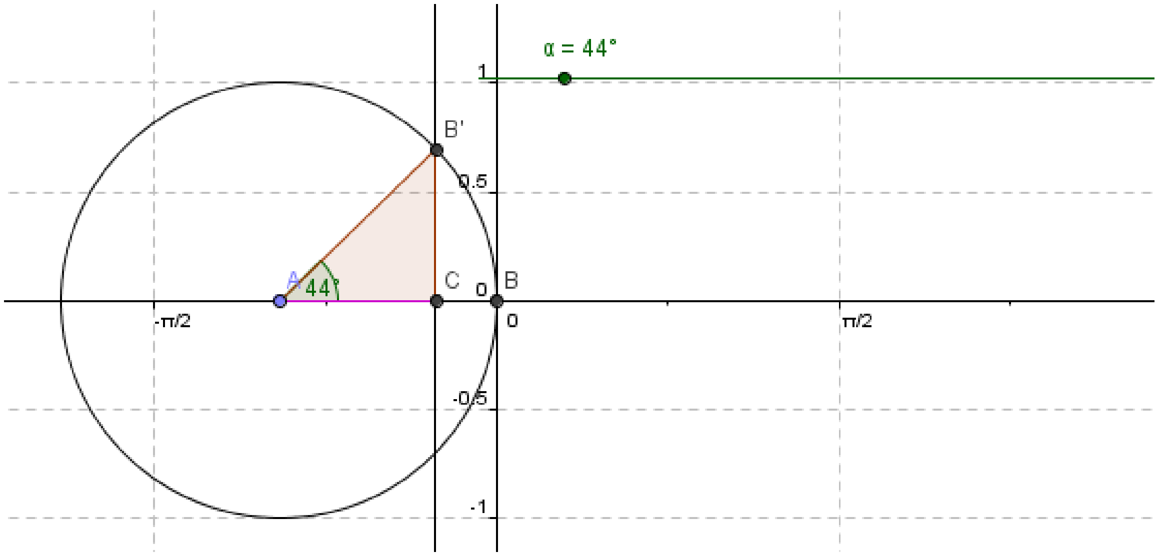
Click en el cuadro de opción ángulo/ ángulo dada su amplitud.

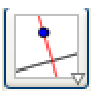
Click izquierdo en el punto B, luego en el punto A, automáticamente aparecerá un recuadro. En este cambiamos la opción 45^{o} por *α* y dejamos la opción sentido anti horario como esta. Aparecerá un ángulo, el cual al mover el punto del deslizador este variara en la circunferencia.



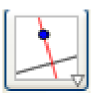
 Click recta perpendicular y le damos click en el punto B’ y en el eje de las x.

 Click en polígono y le damos click a el punto A, B’, C y luego A otra vez, aparecerá una zona sombreada formando un triángulo rectángulo.

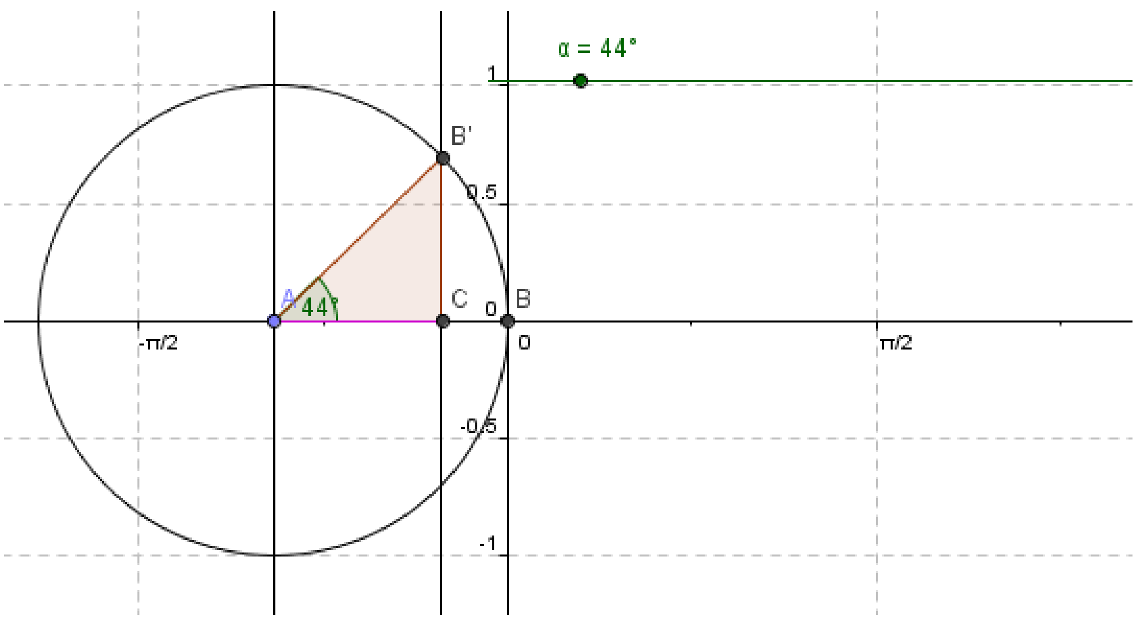


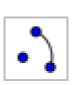


Recta perpendicular B’ y eje y.

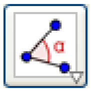


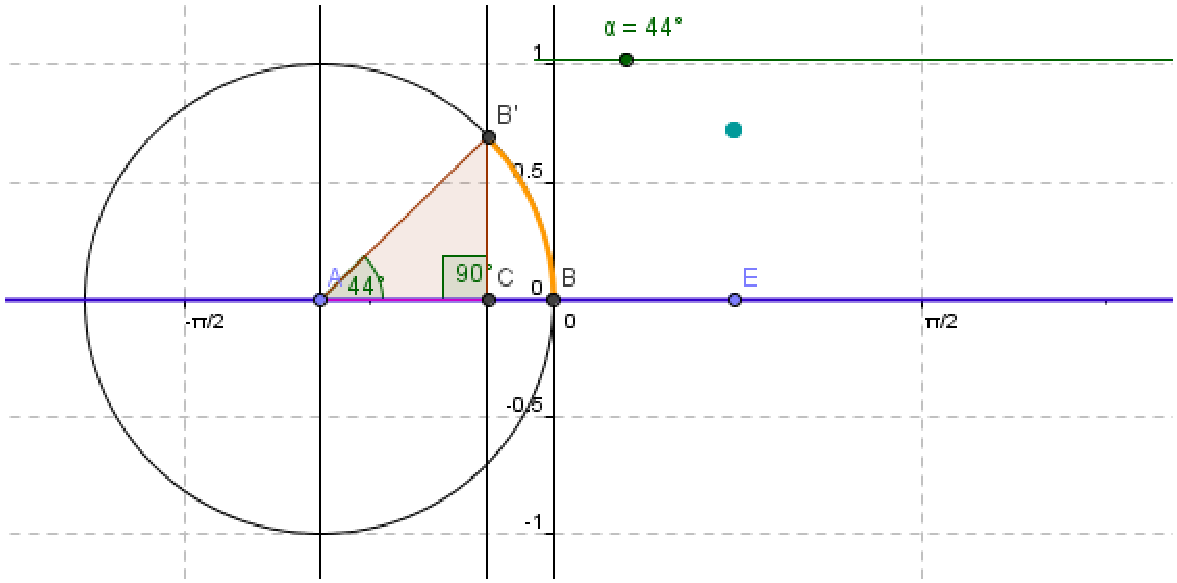
Recta perpendicular A y eje x.

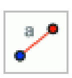


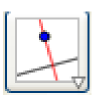


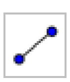
Arco de circunferencia con centro entre dos puntos/click entre A, B Y B’

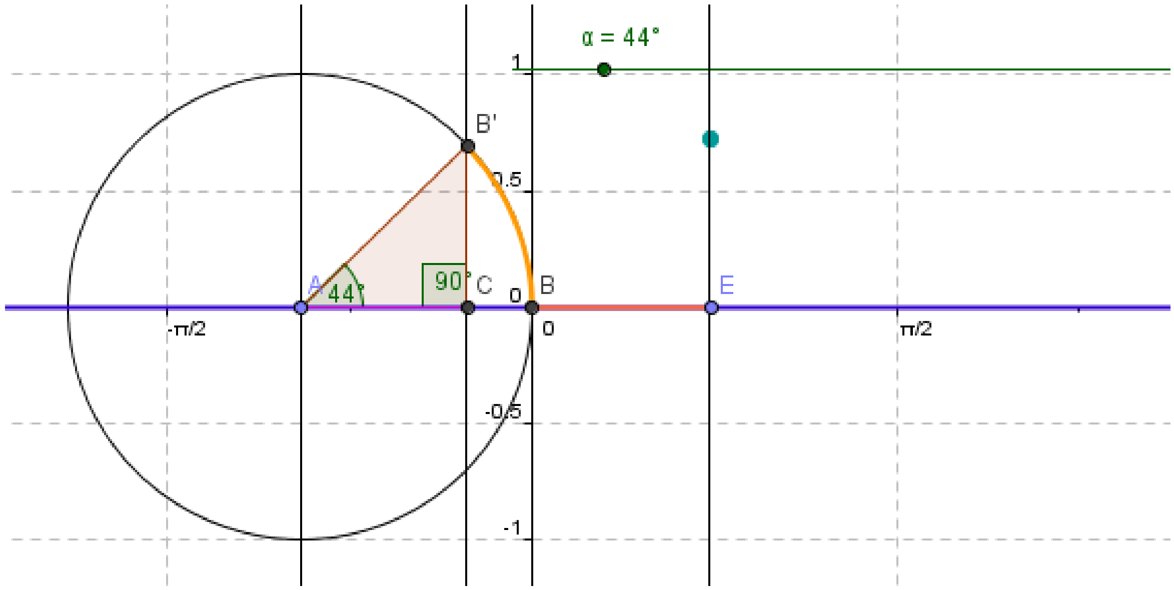
 Angulo B’, C Y A

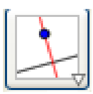


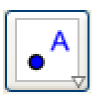
 Segmento dados punto extremo y longitud/click en el punto B/aparecerá un recuadro y le damos la distancia del arco, ejemplo e.

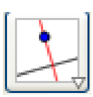
 Recta perpendicular y doble click en el punto E del segmento entre los dos puntos.

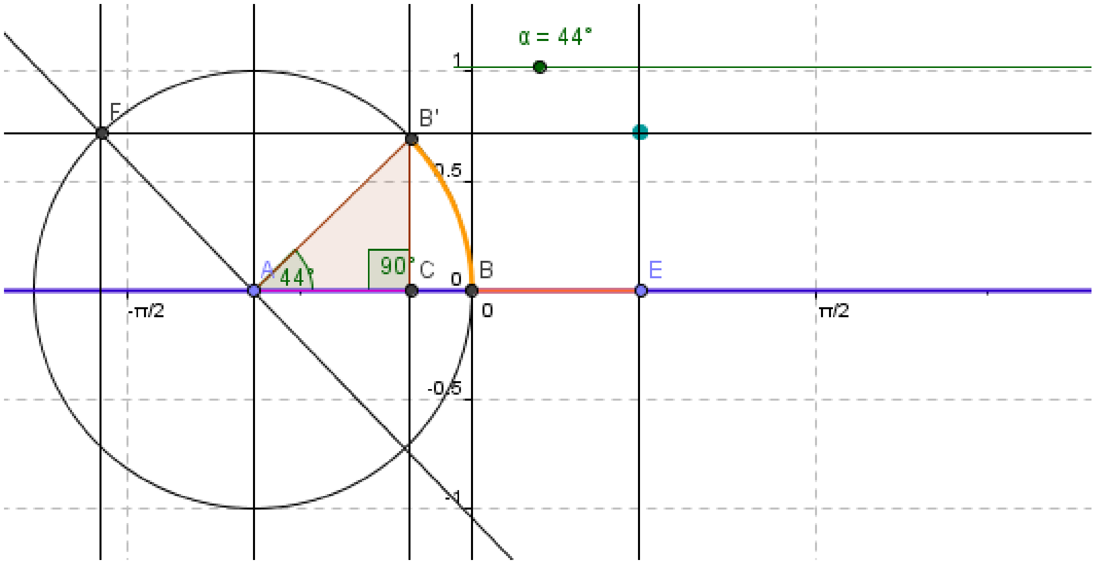
 Segmento entre dos puntos CB’.

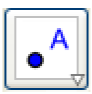


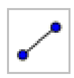
 Recta perpendicular al segmento AB’ y la situamos en el punto A.

 En la intersección del segmento AB’ y la circunferencia creamos un punto, ejemplo F.

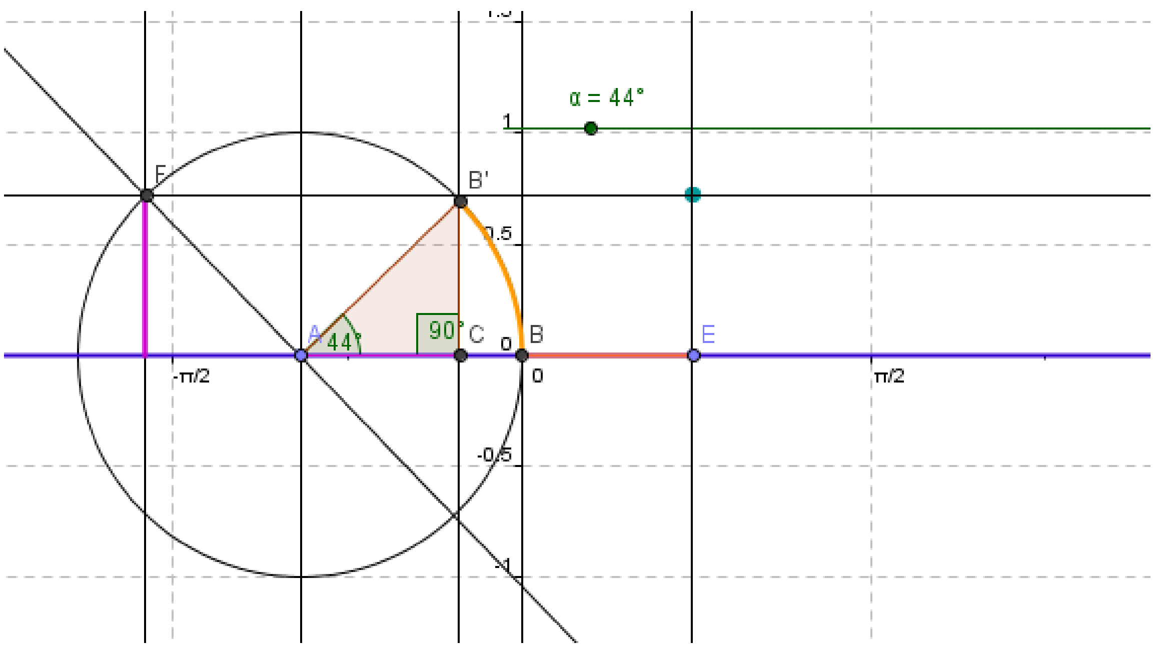
 Luego trazamos dos rectas perpendiculares una al eje x y otra al eje y que pasen por el punto F.



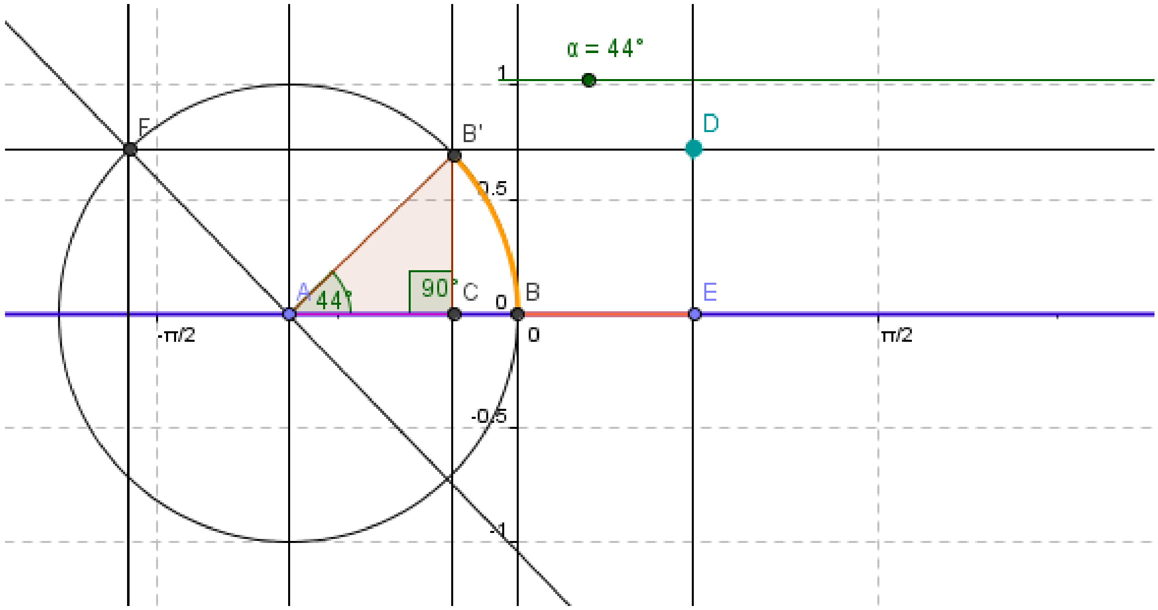


Creamos el punto G/  segmento entre dos punto GF.

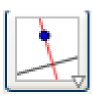
Utilizamos el deslizador y observamos que a medida que varía el segmento AC su longitud es igual a la del segmento GF.

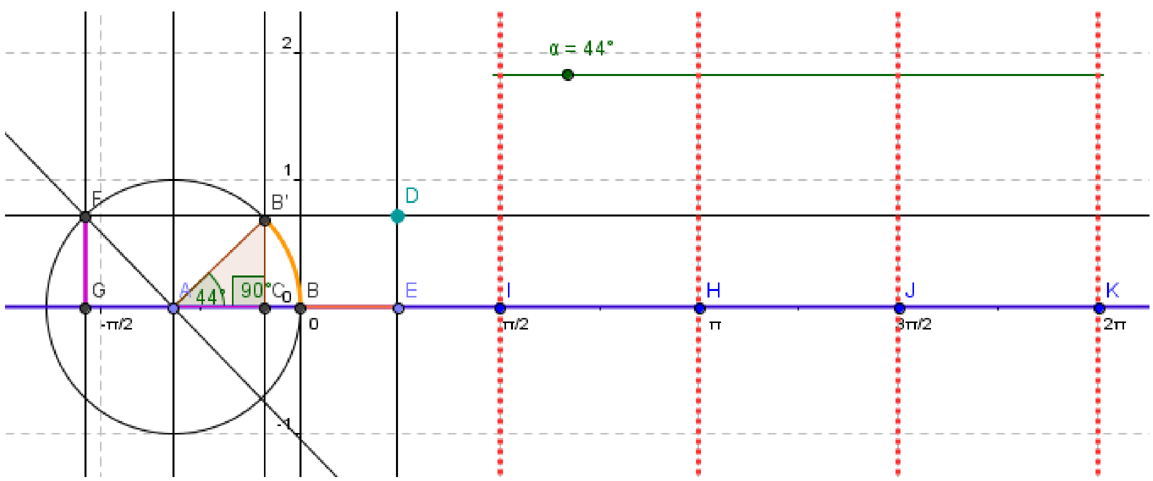


En la intersección de las rectas q pasan por los puntos F y E, creamos nuevo punto D.

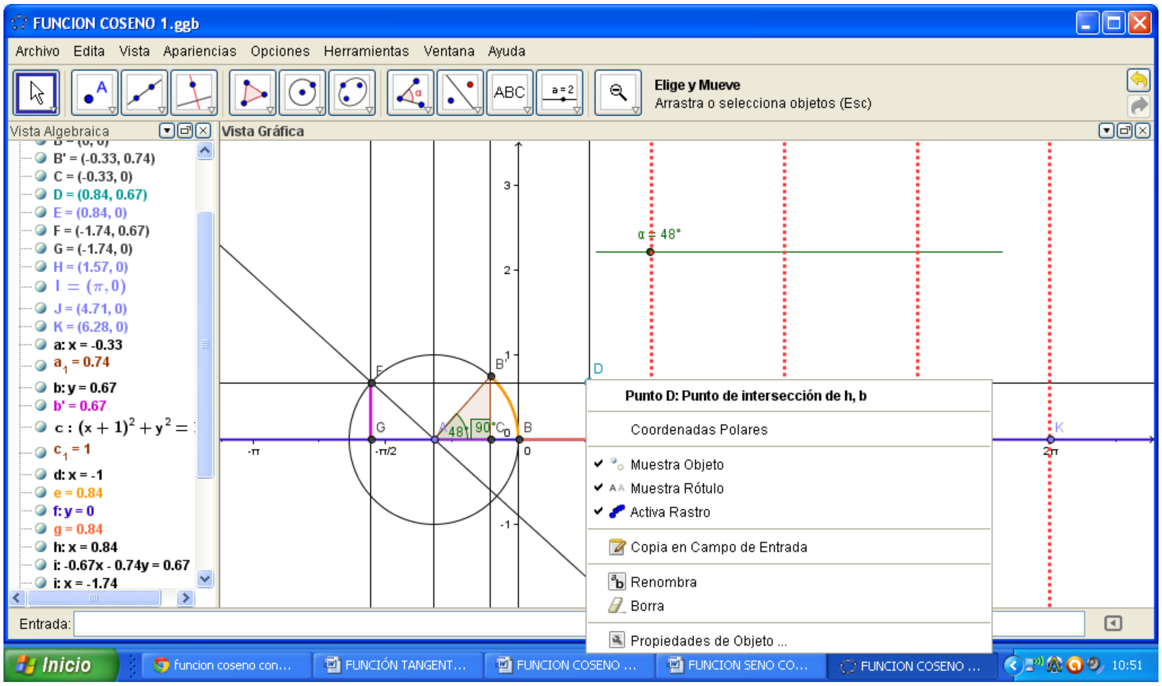


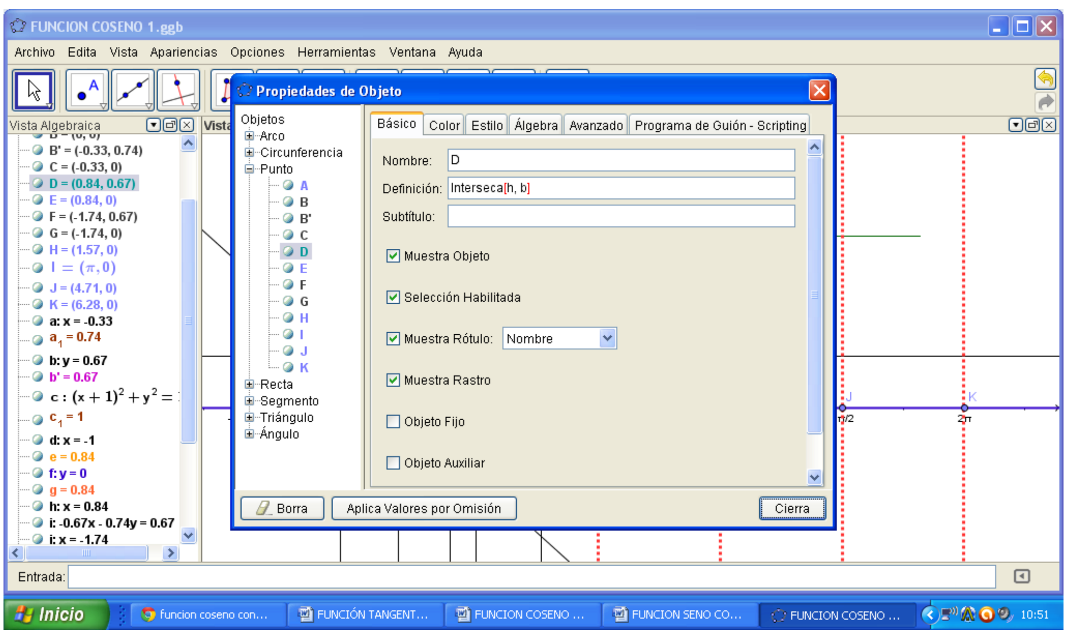
Luego damos en click derecho/ vista grafica/ eje x/ distancia/ π/2/ graduaciones/ cierra. Ahora el eje de las x aparece seccionado por partes de a π /4.

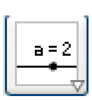
 Se trazan líneas perpendiculares en cada sección de π /2.



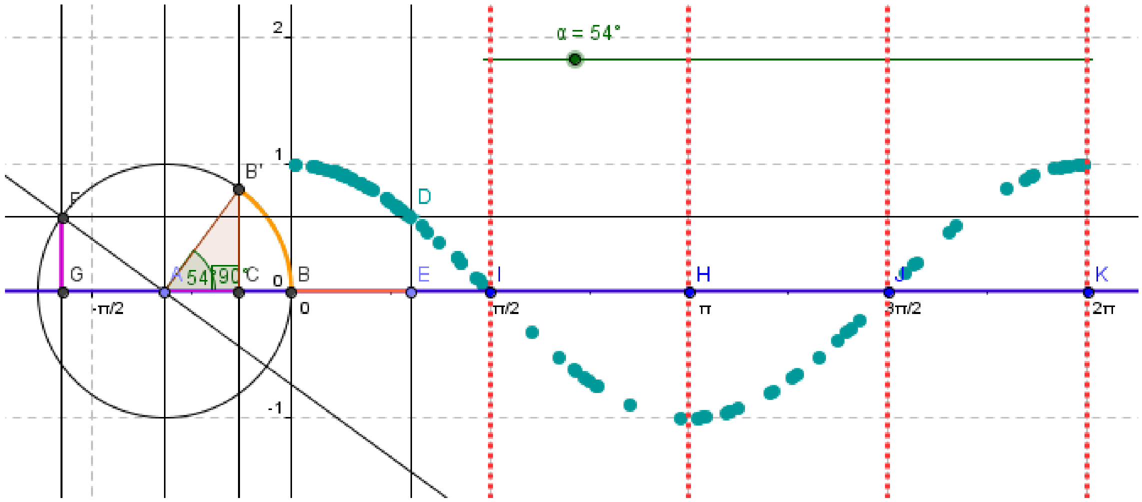
Ahora damos click derecho a D/ propiedades de objeto/ básico/ muestra rastro/ cerrar.







Luego vamos al deslizador y movemos. Se puede observar que se forma la función Cos(x).



ACTIVIDAD

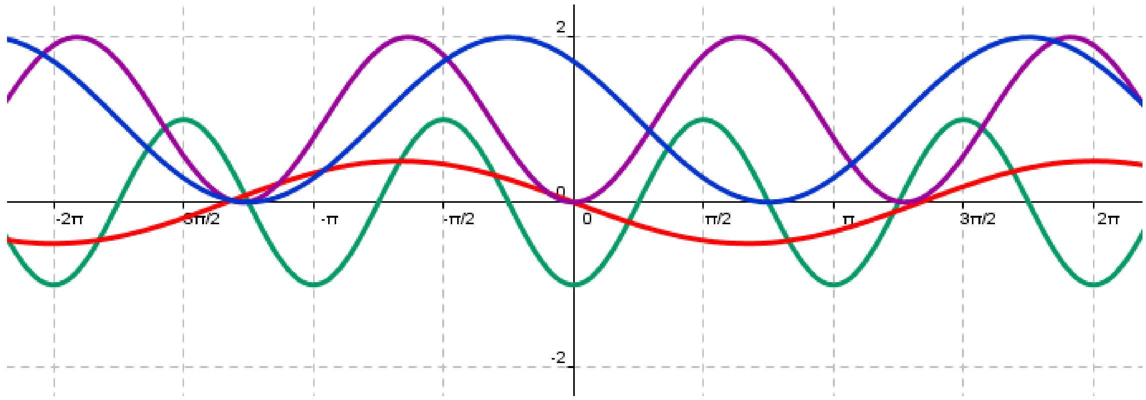
- Construir la animación de la función cos(x) en el programa Geogebra.
- Identificar que elementos se deben variar para construir la función cos(x).
- ¿Qué longitud representa el cateto adyacente al ángulo en la función cos(x)?
- ¿Cuál es el periodo de la función cos(x)?
- ¿Por qué la función cos(x) es acotada en el eje y y crece infinitamente en el eje de las x?

SITUACIÓN 2.1. CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN COS(X) EN PAPEL MILIMETRADO.

Realizar la gráfica de la función cos(x) en el papel milimetrado siguiendo las indicaciones dadas en clase.

SITUACIÓN 3. ELEMENTOS DE LA FUNCIÓN COS(X).

Realiza las siguientes gráficas en el programa Geogebra y completa el cuadro:



Gráficas de la función cos(x).

Función	*Amplitud*	*Período*	*fase*	*Constante de fase*
*F(x)=cos(2x+**π**)*				
*F(x)=(1/2)cos((3/4)x+(1/2)**π**)*				
*F(x)=1-cos((**π**/2)x)*				
*F(x)=1+cos(x+(**π**/4))*				

SITUACIÓN 4. GRÁFICAS DE FUNCIÓN COS(X).

Gráficas de función cos(x).

Por grupos los estudiantes realizaran en el programa **Geogebra** la tabla y grafica de cada función en un mismo plano cartesiano. Esto con el fin de que evidencien como varía una función respecto a otra dependiendo de su estructura.

Cada grupo pasara al tablero y expondrán sus graficas a los demás compañeros, para que estos observen como cambia una función cuando varia la amplitud, la fase, constante de fase, si se le multiplica un valor por fuera de la función, si se suma o se resta un coeficiente a la función, si la fase es dividida por un número, etc.

GRUPO 1	***Y=cos(x), y=(1/2)cos(x), y=(1/3)cos(x), y=1+cos(x), y=2+cos(x), y=3+cos(x)***
GRUPO 2	***Y=cos(x), y=cos(x+ π /2), y=cos(x+ π), y=cos(x+3 π /2), y=cos(x+2 π)***
GRUPO 3	***Y=cos(x), y=cos(2x), y=cos(3x), y=cos(x/2), y=cos(x/3)***
GRUPO 4	***Y=cos(x), y=(1/2)cos(x), y=(1/3)cos(x), y=1-cos(x), y=2-cos(x), y=3-cos(x)***
GRUPO 5	***Y=cos(x), y=cos(x-π/2), y=cos(x- π), y=cos(x-3 π/2), y=cos(x-2 π)***

ANEXO 8. ACTIVIDAD 8. CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN TAN(X).

SITUACIÓN 1: APLICACIONES DE LA FUNCIÓN TAN(X).

Menciona tres ejemplos en donde se evidencie la trayectoria de la Función Tan(x).

Para mayor información puedes visitar el siguiente link:

http://espanol.answers.yahoo.com/question/index?qid=20080510112819AAjgMDw

.

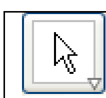
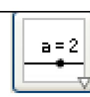
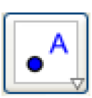
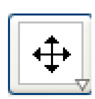
Realiza un esquema en donde se evidencie una aplicación de la función tan(x).

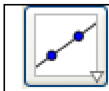
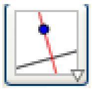
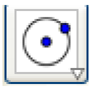
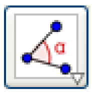
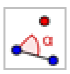
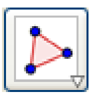
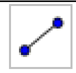
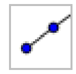
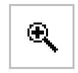
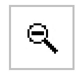
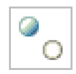
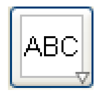
SITUACIÓN 2: CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN TAN(X) EN EL PROGRAMA GEOGEBRA.

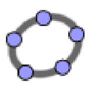
CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN TAN(X) EN EL PROGRAMA GEOGEBRA.

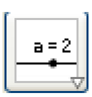
El programa Geogebra, además de construir figuras, nos permite comprobar propiedades geométricas. A partir del movimiento de objetos de una construcción inicial (puntos, rectas, polígonos…), se obtiene otra construcción distinta en la que se puede verificar si se mantiene la propiedad estudiada.

Para ello se van a utilizar las siguientes opciones del menú de la barra de herramientas.

 **Selecciona y desplaza objetos.**	 **Deslizador.**
 **Nuevo punto.**	 **Desplaza Vista Gráfica.**

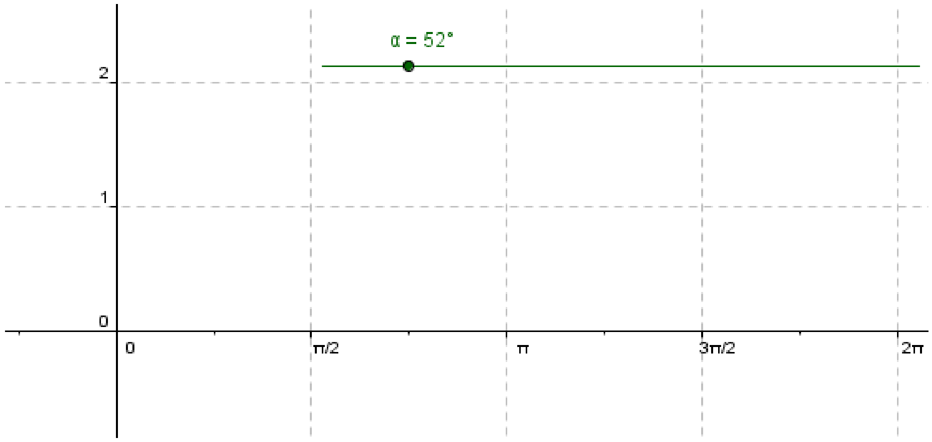
 **Recta que pasa por dos puntos.**  **Recta perpendicular.**  **Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos.**  **Ángulo.**  **Ángulo dada su Amplitud.**  **Polígono.**	 **Segmento entre dos puntos.**  **Semirrecta que pasa por dos puntos.**  **Zoom de acercamiento.**  **Zoom de alejamiento.**  **Expone/ Oculta objeto.**  **Inserta texto.**

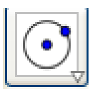
 Abrir programa Geogebra.



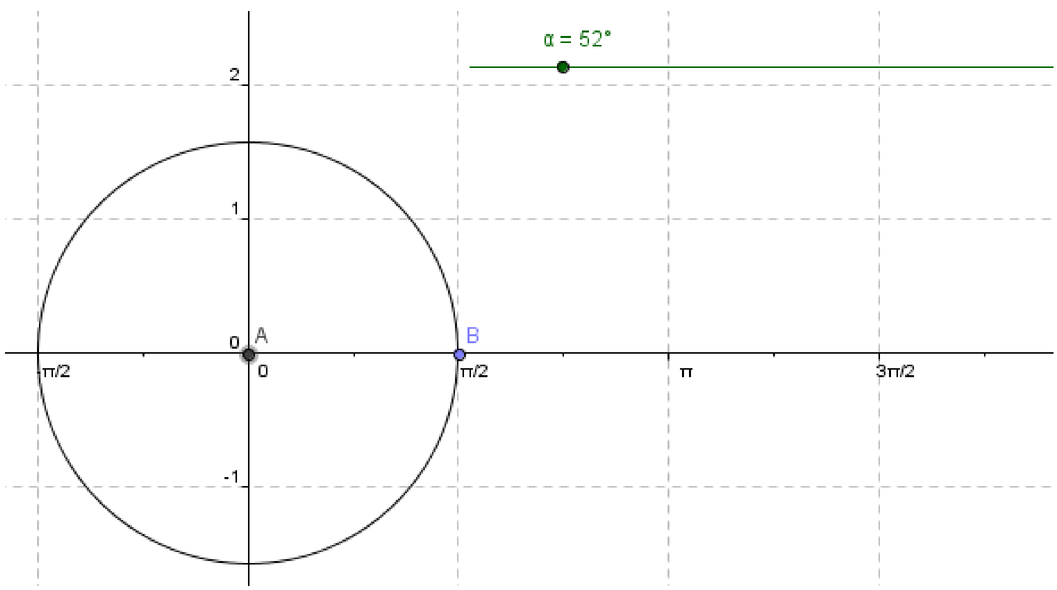
Ir a la herramienta deslizador, dar click en la viñeta del recuadro/ click en deslizador/ click izquierdo en la ventana de trabajo o pantalla.

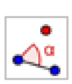
Posteriormente saldrá un recuadro, damos en la opción ángulo, automáticamente el nombre del deslizador cambiara a α, en este mismo recuadro damos click en deslizador y en la opción ancho cambiamos el número que allí se encuentra por 360.



 Click izquierdo en circunferencia dados su centro y uno de sus puntos.

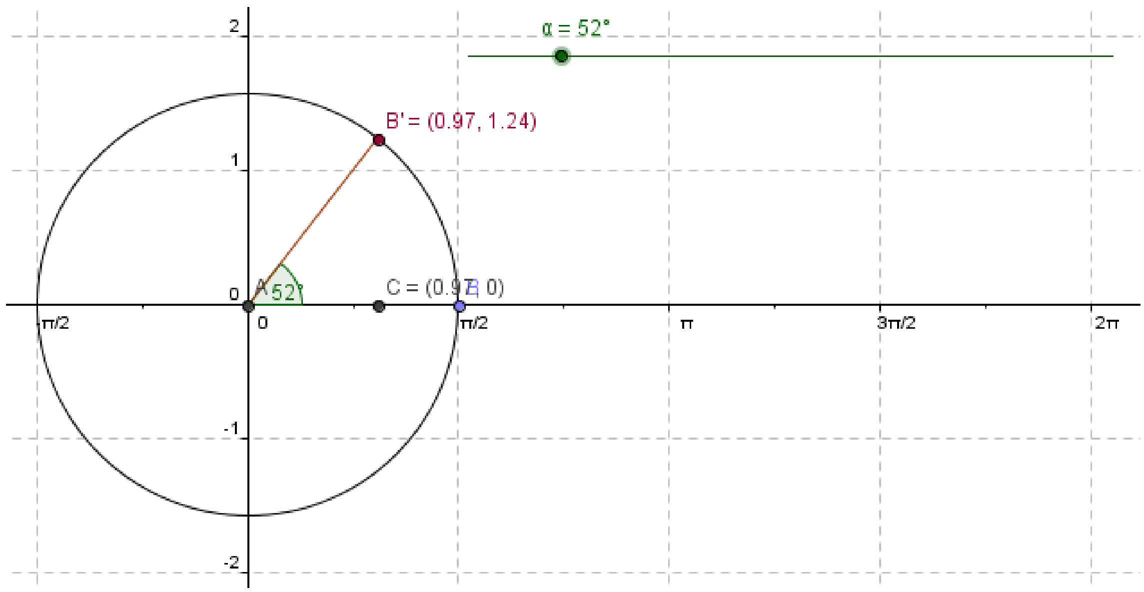
Click izquierdo en el punto (0,0) del plano cartesiano (saldrá el punto A), luego arrastramos la circunferencia hasta el punto (1,0) (saldrá el punto B).

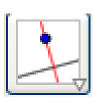


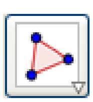
 Click en el cuadro de opción ángulo/ ángulo dada su amplitud.

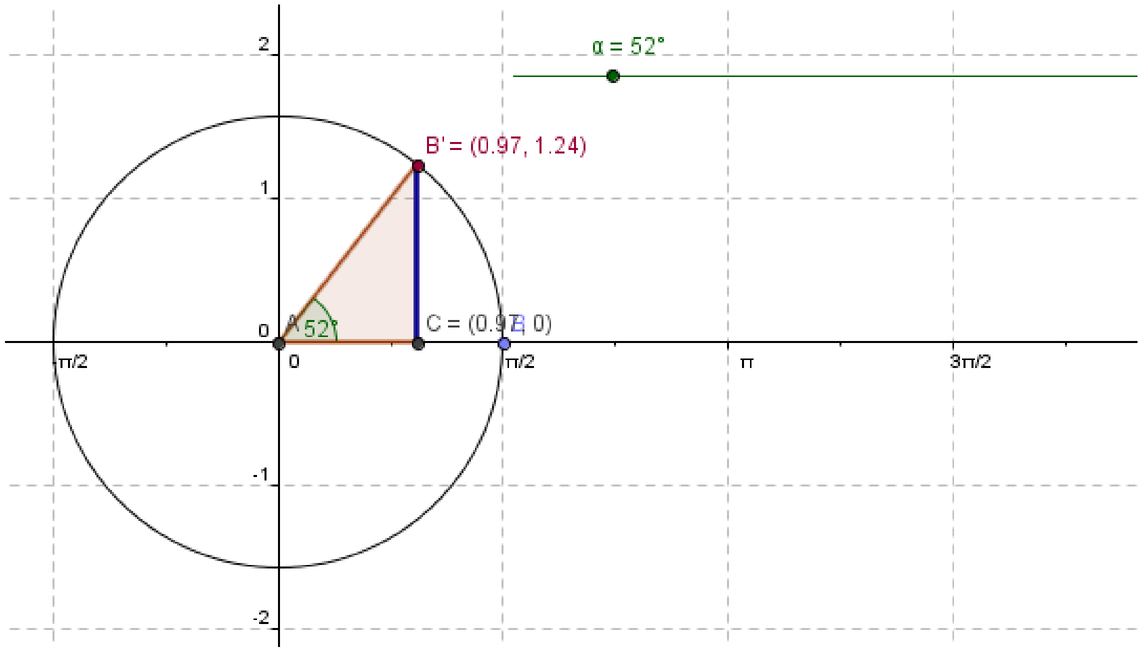
Click izquierdo en el punto B, luego en el punto A, automáticamente aparecerá un recuadro. En este cambiamos la opción 45° por α y dejamos la opción sentido anti horario como esta.

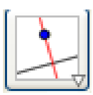
Aparecerá un ángulo, el cual al mover el punto α del deslizador este variara en la circunferencia.

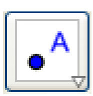


 Click recta perpendicular y le damos click en el punto B' y en el eje de las x.

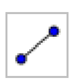
 Click en polígono y le damos click a el punto A, B', C y luego a otra vez, aparecer una zona sombreada formando un triángulo rectángulo.



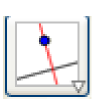
 Click en recta perpendicular y damos en el punto B’ y en el eje de las y.

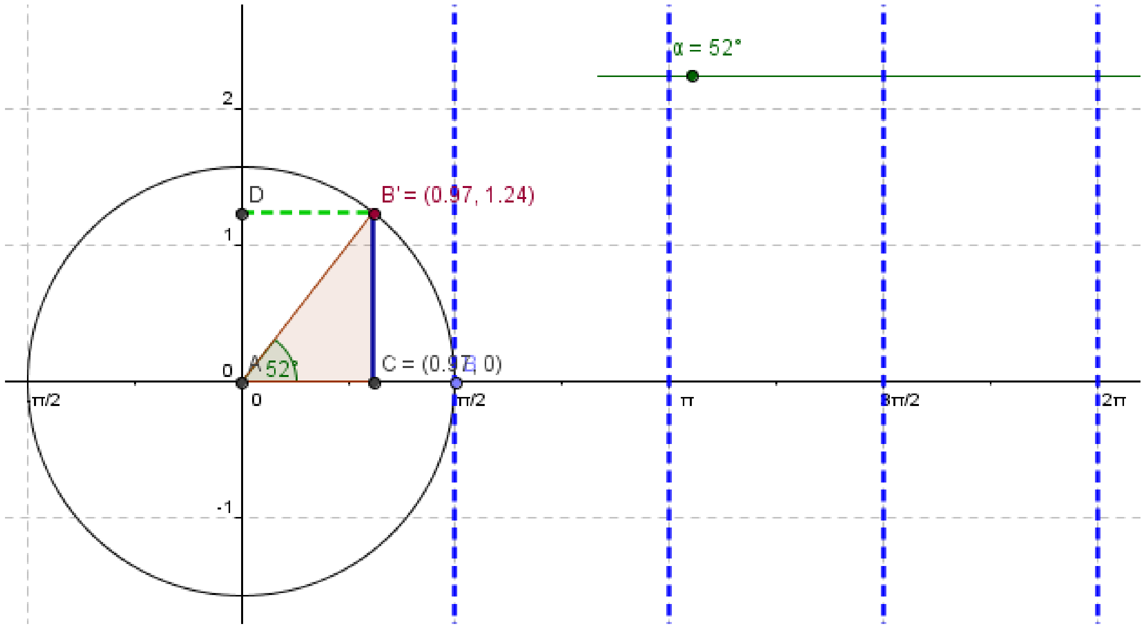


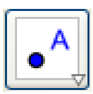
Click en nuevo punto D y lo ubicamos en la intersección que forma la recta paralela que pasa por B’ y el eje de las y.

 Click en segmento entre dos puntos y damos en D y B’, luego hacemos lo mismo para C y B’.

Luego damos en click derecho/ vista grafica/ eje x/ distancia/ π/2/ graduaciones/ cierra. Ahora el eje de las x aparece seccionado por partes de a π /4.

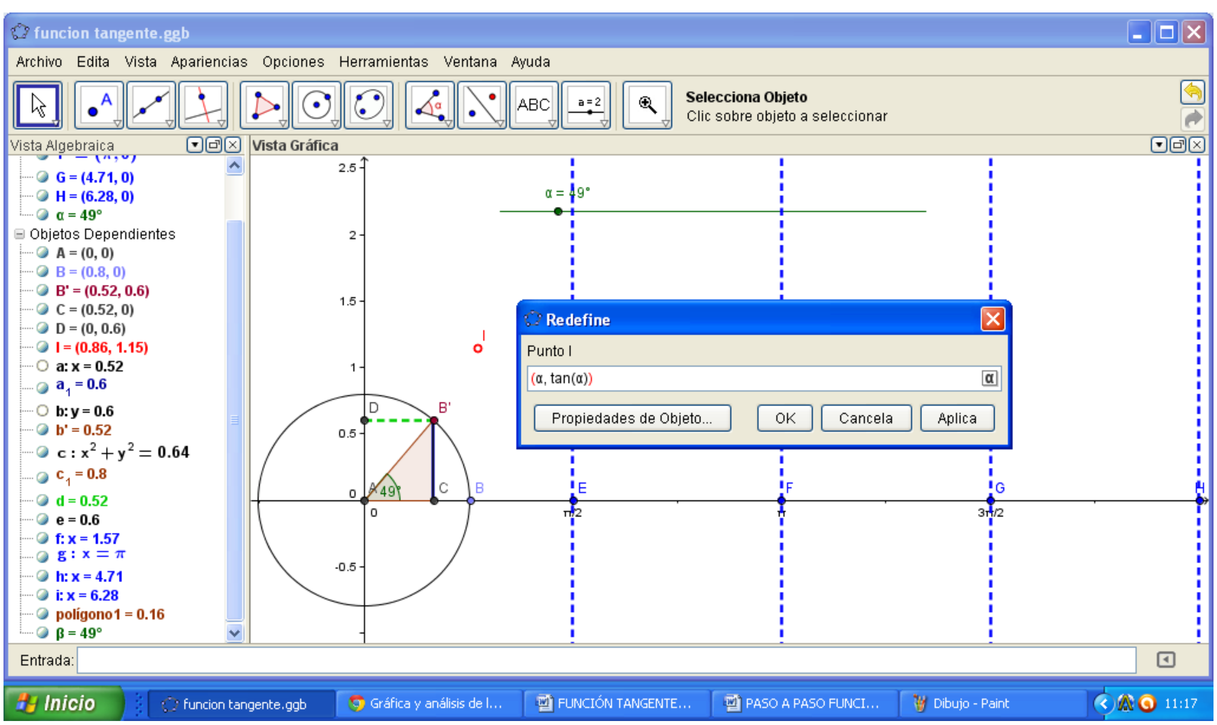
 Se trazan líneas perpendiculares en cada sección de π /2.



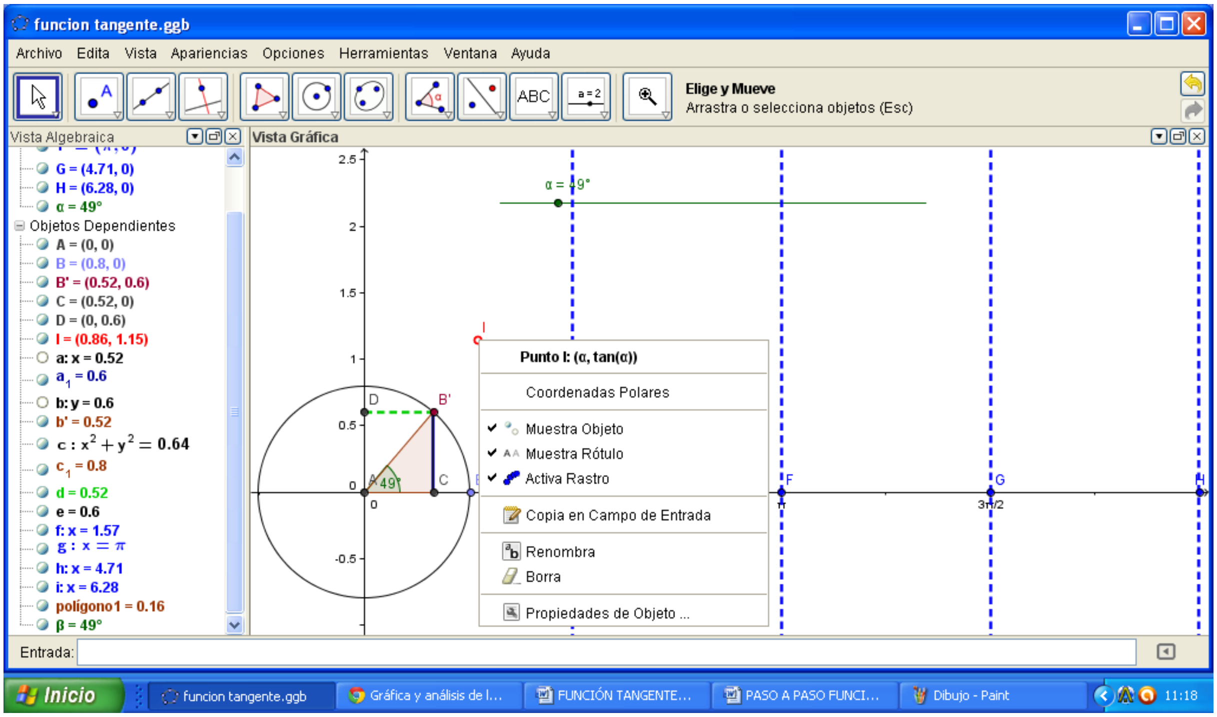


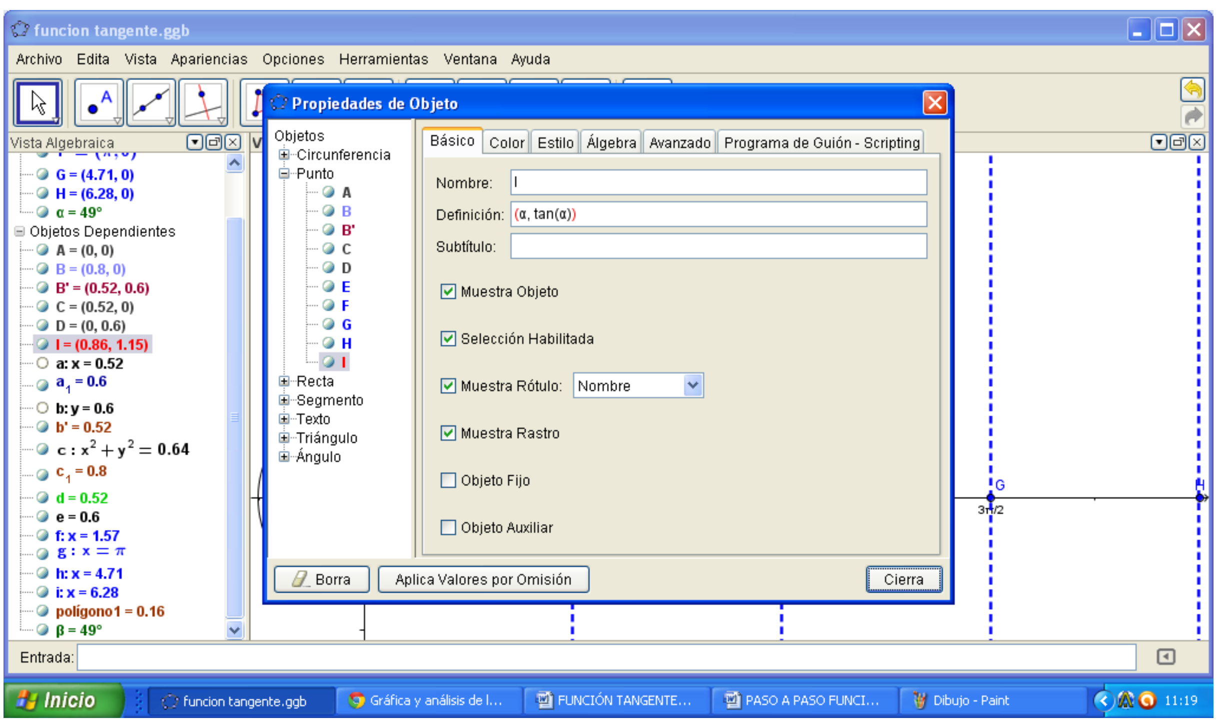
Ahora dibujo un punto I en cualquier parte.

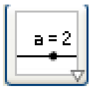
Haciendo doble click sobre I aparecerá una ventana titulada redefine. Borramos las coordenadas de los puntos y escribimos (α, tan (α)) y damos ok.



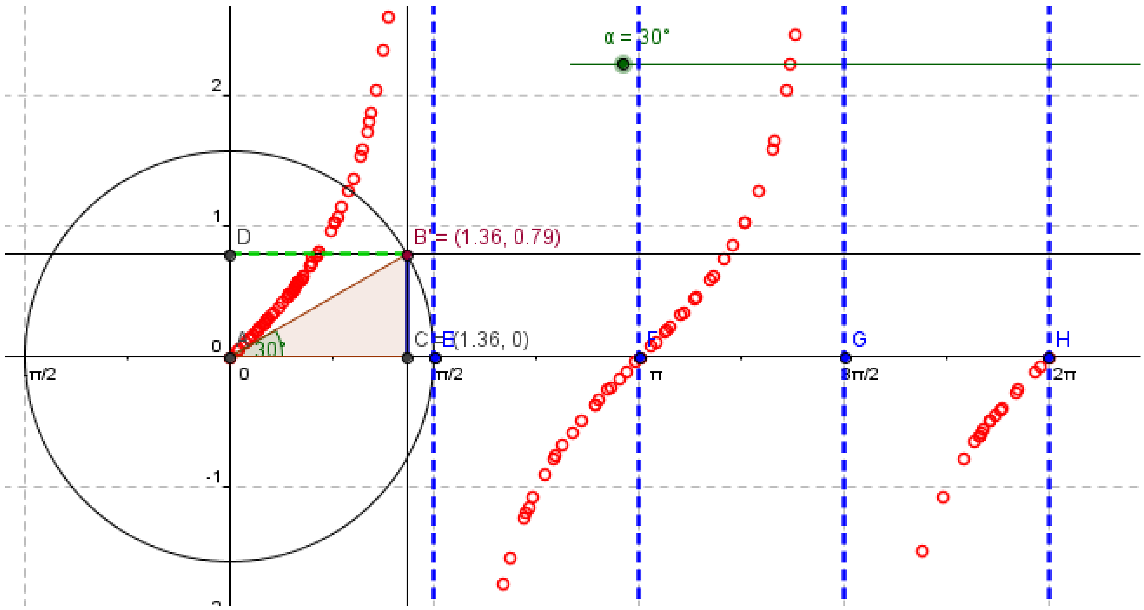
Ahora damos click derecho I/ propiedades de objeto/ básico/ muestra rastro/ cerrar.







Luego vamos al deslizador y movemos. Se puede observar que se forma la función tan(x).



ACTIVIDAD

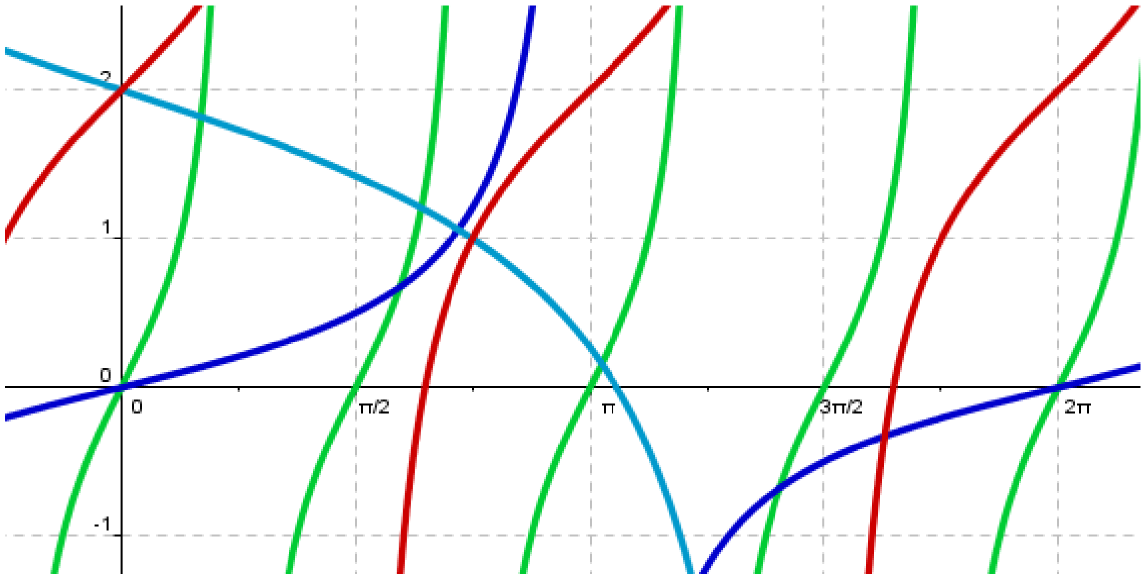
- Construir la animación de la función tan(x) en el programa Geogebra.
- Identificar que elementos se deben variar para construir la función tan(x).
- ¿Cómo se mide la longitud de una circunferencia?
- ¿Qué relación existe entre el arco de una circunferencia y su ángulo?
- ¿Qué longitud representa el cateto opuesto al ángulo en la función tan(x)?
- ¿Cuál es el periodo de la función tan(x)?

SITUACIÓN 2.1. CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN TAN(X) EN PAPEL MILIMETRADO.

Realizar la gráfica de la función tan(x) en el papel milimetrado siguiendo las indicaciones dadas en clase.

SITUACIÓN 3. ELEMENTOS DE LA FUNCIÓN TAN(X).

Realiza las siguientes gráficas en el programa Geogebra y completa el cuadro:



Gráficas de la función tan(x).

Función	***Amplitud***	***Período***	***Fase***	***Constante de fase***
F(x)=tan(2x+π)				
F(x)=(1/2)tan(x/2)				
F(x)=2-tan(x/3)				
F(x)=2+tan(x+ π)				

SITUACIÓN 4. GRÁFICAS DE FUNCIÓN TAN(X).

Gráficas de función Tan(x).

Por grupos los estudiantes realizaran en el programa **Geogebra** la tabla y grafica de cada función en un mismo plano cartesiano. Esto con el fin de que evidencien como varía una función respecto a otra dependiendo de su estructura.

Cada grupo pasara al tablero y expondrán sus graficas a los demás compañeros, para que estos observen como cambia una función cuando varia la amplitud, la fase, constante de fase, si se le multiplica un valor por fuera de la función, si se suma o se resta un coeficiente a la función, si la fase es dividida por un número, etc.

GRUPO 1	***Y=tan(x), y=(1/2)tan(x), y=(1/3)tan(x), y=1+tan(x), y=2+tan(x), y=3+tan(x)***
GRUPO 2	***Y=tan(x), y=tan(x+π/2), y=tan(x+ π), y=tan(x+3 π/2), y=tan(x+2 π)***
GRUPO 3	***Y=tan(x), y=tan(2x), y=tan(3x), y=tan(x/2), y=tan(x/3)***
GRUPO 4	***Y=tan(x), y=(1/2)tan(x), y=(1/3)tan(x), y=1-tan(x), y=2-tan(x), y=3-tan(x)***
GRUPO 5	***Y=tan(x), y=tan(x-π/2), y=tan(x- π), y=tan(x-3 π/2), y=tan(x-2 π)***

A. TIPO DE DOCUMENTO/ OPCION DE GRADO	TESIS DE GRADO
B. ACCESO AL DOCUMENTO	HEMEROTECA DE LA BIBLIOTECA JORGE BOSHELL EN LA UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS
1. TITULO DEL DOCUMENTO	UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA EDUCACIÓN MEDIA UTILIZANDO EL MODELO DE VAN HIELE.
2. NOMBRE Y APELLIDOS DE AUTOR (ES)	PEÑA MEDINA CARLOS JULIÁN VARGAS GONZÁLEZ JUAN CAMILO
3. DIRECTOR (ES)	CASTRO GALVIS, ARTURO ALEXANDER LONDOÑO, IVONNE AMPARO
4. AÑO DE LA PUBLICACION	VILLAVICENCIO – META, UNIVESIDAD DE LOS LLANOS, ABRIL DE 2015, 182 PAGÍNAS.
5. UNIDAD PATROCINANTE	UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS
6. PALABRAS CLAVES	GEOMETRÍA, FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, UNIDAD DIDÁCTICA, VAN HIELE, GEOGEBRA.
7. DESCRIPCIÓN	TRABAJO REALIZADO PARA PROMOVER Y EVALUAR UNA UNIDAD DIDÁCTICA APLICANDO EL MODELO DE VAN HIELE COMO UNA ALTERNATIVA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO (10) DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
8. FUENTES	ALGARÍN, D. L. Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. (Tesis de maestría) Bucaramanga, 2013.

	DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, grupo educación matemática. 1999. FIALLO, J. Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia. 2010. FREUDENTHAL, H. Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (L. Puig, Trans.). En E. Sánchez (Ed.), Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados) (2ª edición). México D.F. Departamento de Matemática Educativa. 2001. GUTIERREZ, Á., FIALLO, J. Enseñanza de la trigonometría con ayuda de SGD. En T. Recio (Ed.), Geometría Dinámica. Madrid, España: Anaya, 2009. JANVIER, C. Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale N.J.: Lawrence Erlbaum Associates. 1987. MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL (MEN). Procesos generales como el razonamiento, la resolución y el planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. 1998. SAMPER C. LEGUIZAMON C, CAMARGO L. Razonamiento en geometría Revista EMA. Vol 6, No 2. VAN HIELE, P. M. El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría). (Tesis doctoral).

	Universidad de Utrecht, Utrecht (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).
9. CONTENIDOS	EL MARCO TEÓRICO TIENE EN CUENTA LA DEFINICIÓN, ELABORACION Y PLANIFICACION DE UNA UNIDAD DIDACTICA, LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA TRIGONOMETRIA, MODELO DE VAN HIELE Y SUS NIVELES, ADEMÁS DE LOS CONTENIDOS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. LA METODOLOGÍA ENGLOBA TODO AQUELLO RELACIONADO CON LA POBLACIÓN, MUESTRA Y LAS DIFERENTES FASES DE LA INVESTIGACIÓN. PARA FINALIZAR, ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LAS FASES DE EJECUCIÓN Y OBSERVACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS, AL IGUAL QUE LAS CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES, ANEXOS Y BIBLIOGRAFÍA.
10. METODOLOGIA	EL PROYECTO SE CENTRA EN UNA METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN ACCIÓN, YA QUE SU FINALIDAD RADICA EN REALIZAR UNA INTERVENCIÓN A UN PROBLEMA PRÁCTICO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA, ESPECÍFICAMENTE EN EL ÁMBITO DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS.
11. CONCLUSIONES	ES GRATIFICANTE PERCIBIR QUE LAS ACTIVIDADES ELABORADAS TIENEN UN IMPACTO POSITIVO EN LOS EDUCANDOS. AL MISMO TIEMPO QUE FAVORECEN LA COMPRENSIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y EVIDENCIAR COMO EL MANEJO DE LA OVA CONTRIBUYE CON EL TRABAJO AUTÓNOMO, EN TANTO QUE BRINDA

	A LOS ESTUDIANTES LA OPORTUNIDAD DE INTERACTUAR CON LA TECNOLOGÍA; AUNQUE NO TODOS LOS ESTUDIANTES TIENEN ACCESO A LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS, LO CUAL DIFICULTA EL DESARROLLO DE UN TRABAJO VIRTUAL MÁS EFICAZ.
12. FECHA DE ELABORACION	DIEZ DE ABRIL DE DOS MIL QUINCE 10/04/2015