

**EL IMPACTO DE UNA ENTIDAD FINANCIERA EN LA REDUCCIÓN DE LA
DESIGUALDAD A PARTIR DE MODELOS BASADOS EN AGENTES**

**JOSE LUIS ALVARADO MARTÍNEZ
WILDER ARLEHT ANGARITA OSORIO**

**UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA Y BELLAS ARTES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
VILLAVICENCIO**

2019

**EL IMPACTO DE UNA ENTIDAD FINANCIERA EN LA REDUCCIÓN DE LA
DESIGUALDAD A PARTIR DE MODELOS BASADOS EN AGENTES**

JOSE LUIS ALVARADO MARTÍNEZ

Código: 141003321

WILDER ARLEHT ANGARITA OSORIO

Código:141003302

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de
Licenciado en Matemáticas y Física**

Director:

ALEXANDER SANTOS NIÑO

Magister en Física

**UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA Y BELLAS ARTES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
VILLAVICENCIO**

2019

	UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS	CÓDIGO: FO-DOC-97	
		VERSIÓN: 02	PÁGINA: 3
	PROCESO DE DOCENCIA	FECHA: 02/09/2016	
	FORMATO AUTORIZACIÓN DE DERECHOS	VIGENCIA: 2016	

AUTORIZACIÓN

Yo Jose Luis Alvarado Martinez mayor de edad, identificado con la Cédula de Ciudadanía No. 1123115765 de San Carlos de Guaroa - Meta, y Yo Wilder Arleht Angarita Osorio mayor de edad, identificado con la Cédula de Ciudadanía No. 1121944789 de Villavicencio - Meta, actuando en nombre propio en nuestra calidad de autores del trabajo de grado denominado “El impacto de una entidad financiera en la reducción de la desigualdad a partir de modelos basados en agentes”, hacemos entrega del ejemplar y de sus anexos, en formato digital o electrónico (CD-ROM) y autorizamos a la **UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS**, para que en los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia, con la finalidad de que se utilice y use en todas sus formas, realice la reproducción, comunicación pública, edición y distribución, en formato impreso y digital, o formato conocido o por conocer de manera total y parcial de mi trabajo de grado. **Jose Luis Alvarado Matinez - Estudiante** y **Wilder Arleht Angarita Osorio - Estudiante**, Como autores, manifestamos que el trabajo de grado objeto de la presente autorización, es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros; por tanto, la obra es de nuestra exclusiva autoría y poseemos la titularidad sobre la misma; en caso de presentarse cualquier reclamación o acción por parte de un tercero en cuanto a los derechos de autor sobre la obra en cuestión, como autores, asumiremos toda la responsabilidad, y saldremos en defensa de los derechos aquí autorizados, para todos los efectos la Universidad actúa como un tercero de buena fe. Para constancia, se firma el presente documento en dos (2) ejemplares del mismo valor y tenor en Villavicencio - Meta, a los 18 días del mes de Noviembre del dos mil diecinueve (18-11-2019).

LOS AUTORES – ESTUDIANTES

Firma: _____	Firma: _____
Nombre: _____	Nombre: _____
C.C. No. _____ de _____	C.C. No. _____ de _____

AUTORIDADES ACADÉMICAS

PABLO EMILIO CRUZ CASALLAS

Rector

MARIA LUISA PINZÓN ROCHA

Vicerrectora académica

GIOVANNY QUINTERO REYES

Secretario general

LUZ HAYDEÉ GONZÁLEZ OCAMPO

Decana de la Facultad Ciencias Humanas y de la Educación

BEATRIZ AVELINA VILLARRAGA BAQUERO

Directora de la Escuela de Pedagogía y Bellas Artes

NASLY YANIRA MARTÍNEZ VELÁSQUEZ

Directora del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física

NOTA DE ACEPTACIÓN

Aprobado en cumplimiento de los requisitos exigidos por la Universidad de los Llanos para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física. En constancia de lo anterior, firman:

FREDY LEONARDO DUBEIBE

Director del centro de investigaciones de la Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación

NASLY YANIRA MARTÍNEZ VELÁSQUEZ

Directora del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física

FREDY LEONARDO DUBEIBE

Evaluador

JAIRO ENRIQUE TORRES MALDONADO

Evaluador

ALEXANDER SANTOS NIÑO

Director del Trabajo de grado

AGRADECIMIENTOS

A nuestro director Alexander Santos Niño, a quien admiramos, por su guía y esfuerzo a enseñarnos que la física es una ciencia que devela la esencia misma de la naturaleza.

Gracias a nuestra familia y en especial a nuestras madres María y Mireya. A nuestros amigos Tatiana, Camila, Jorge y Keven por su apoyo incondicional...

TABLA DE CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	11
1. MARCO REFERENCIAL	16
1.1. MODELOS BASADOS EN AGENTES	16
1.2. MODELOS CINÉTICOS DE DISTRIBUCIÓN DE DINERO	17
1.3. LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN C++	26
1.4. FORMAS DE MEDIR LA DESIGUALDAD	27
2. MATERIALES Y MÉTODOS	31
2.1. ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN	31
2.2. RUTA METODOLÓGICA	31
3. RESULTADOS Y ANÁLISIS	33
3.1. DISTRIBUCIONES DE BOLTZMANN-GIBBS Y GAMMA	33
3.2. DATOS EMPÍRICOS	43
3.3. ENTIDAD FINANCIERA	46
4. CONCLUSIONES	56
5. RECOMENDACIONES	57
BIBLIOGRAFÍA	58
ANEXOS	62
RESUMEN ANALÍTICO ESPECIALIZADO	68

LISTA DE GRÁFICAS

	pág.
1. Histograma y puntos: distribución de probabilidad estacionaria de dinero $P(m)$. Curvas sólidas: se ajustan a la Boltzmann-Gibbs	18
2. Evolución temporal de la entropía	20
3. Distribución estacionaria de dinero para distintos lambda	22
4. Distribución estacionaria de dinero $P(m)$ en el modelo para lambda distribuido. En el recuadro se muestra que el pico más probable m_p tiende a 0	23
5. Distribución empírica de USA y Japón	24
6. Coeficiente de Gini en el modelo de un impuesto fijo de transferencia de dinero	25
7. Recta de igualdad y curva de Lorenz	28
8. Diagrama de flujo para simulación de la distribución de Boltzmann-Gibbs .	34
9. Histograma y puntos: distribución de probabilidad estacionaria de dinero $P(m)$	35
10. Evolución temporal de la entropía. Curva superior negra: para el intercambio de una fracción aleatoria del dinero promedio del sistema: $\Delta m = \epsilon(\frac{M}{N})$. Curva superior roja: para el intercambio de una fracción aleatoria del dinero promedio de los agentes $\Delta m = \epsilon(\frac{m_i+m_j}{2})$. Curva inferior: para el intercambio de una pequeña cantidad constante $\Delta m = 1$	37
11. Diagrama de flujo para simulación de la distribución Gamma	39
12. Comportamiento en el tiempo del valor de la entropía para los distintos valores de propensión al ahorro en el modelo cinético de Chakrabarti-Chakraborti	40
13. Curva de Lorenz variando la propensión al ahorro λ y línea de equidad . .	41
14. Relación entre el índice de Gini con distintos valores de propensión al ahorro λ	41
15. Distribución estacionaria de dinero $P(m)$ versus dinero m_i para diferentes factores de propensión al ahorro λ ($N = 500, M = 500$).	42
16. Distribución de probabilidad de ingreso de individuos afiliados al PSID en el año 1994, la línea sólida se ajusta a una función exponencial.	44
17. Distribución de probabilidad de ingreso para los 400 más ricos de USA del año 2018 según la revista Forbes. La línea sólida se ajusta a una ley de potencias.	45

18. Diagrama de flujo para simulación de la entidad	49
19. Evolución temporal del dinero de la entidad. En el recuadro se muestra el comportamiento inicial.	50
20. Variación del ahorro ξ respecto al tiempo de saturación t_s	52
21. Tiempo de saturación al variar el interés de captación φ	53
22. Deuda de los agentes en cada paso de tiempo.	54

LISTA DE TABLAS

	pág.
1. Ajuste a función de Boltzmann-Gibbs	36
2. Ajuste a función Gamma para $\lambda = 0.7$	43
3. Número de datos y parámetros de ajuste obtenidos de la función exponencial para los datos del ingreso de individuos. PSID-1994.	44
4. Número de datos y parámetros de ajuste obtenidos para la distribución de Pareto obtenida de los datos de Forbes 400 del 2018	45
5. Ajuste a función Logística	51
6. Ajuste del ξ vs tiempo de saturación	52
7. Ajuste del φ vs tiempo de saturación	53

INTRODUCCIÓN

La econofísica es un nuevo campo de conocimiento que se encarga de aplicar modelos y usar herramientas desarrolladas en la física para analizar fenómenos económicos y financieros¹. De esta manera, busca dar explicación a eventos económicos mediante el uso de herramientas que han sido originalmente desarrolladas en materia condensada y en física estadística. Los desarrollos empíricos y teóricos en esta disciplina, han logrado emplear modelos basados en agentes (MBA) para estudiar distribuciones empíricas de riqueza, lo que se conoce con el nombre de modelos cinéticos de distribución².

Los MBA han tenido éxito al encontrar la forma de la distribución de riqueza empírica por medio de simulaciones computacionales³. Gracias a ello es posible analizar la desigualdad a partir de las interacciones entre los actores económicos y abren la puerta a estudios más complejos que analicen el impacto de políticas de Estado en la reducción de la desigualdad, es decir, esta es una técnica que se puede extrapolar para estudiar fenómenos que afecten la distribución de riqueza⁴. Los MBA son una forma ideal de modelar sistemas económicos y estudiar el impacto de políticas de Estado antes de aplicarlas, y de esta forma, asegurar el bienestar de los sistemas económicos actuales sin arriesgar el futuro de la economía.

Basados en los MBA están los modelos cinéticos de distribución de dinero usados para describir sistemas económicos asemejándolos a un gas ideal, considerando un sistema cerrado aislado donde el dinero total M y el número total de agentes N es fijo. Aunque esta condición no es estrictamente realista, tiene una validez condicionada debido a que la cantidad de dinero disponible en un país es regulada por el banco central, que emite dinero regularmente en cantidades mucho menores al dinero circulante, por ejemplo, Colombia en el año 2016 disponía de 67.3 billones de pesos de dinero y el Banco Central emitió 4.7 billones de pesos adicionales lo que

¹SCHINCKUS, Christophe. «Is econophysics a new discipline? The neopositivist argument». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 389.18 (2010), págs. 3814-3821.

²CHAKRABORTI, Anirban y col. «Econophysics review: II. Agent-based models». En: *Quantitative Finance* 11.7 (2011), págs. 1013-1041.

³GARCÍA, José Ignacio y Valdecasas Medina. «La simulación basada en agentes: una nueva forma de explorar los fenómenos sociales». En: *Revista Española de Investigaciones Sociológicas (REIS)* 136.1 (2011), págs. 91-109.

⁴LARROSA, Juan Manuel. «Agentes computacionales y análisis económico». En: *Revista de Economía Institucional* 18.34 (2016), págs. 87-113.

representa alrededor del 7 % del aumento del dinero en circulación⁵.

En el sistema no se genera ni se exporta ningún bien y la única actividad económica está relacionada con el comercio, donde cada agente i , individuo o corporación, posee dinero m_i . En una transacción, un par de comerciantes i y j intercambian su dinero aleatoriamente, de manera que su dinero total se conserva (localmente) y ninguno termina con dinero negativo, lo que equivale a no considerar deuda en el sistema⁶. De la dinámica de estos sistemas emergen distribuciones de Boltzmann Gibbs, Gamma, Pareto, entre otras, resultado de modelos propuestos por autores como: Drăgulescu y Yakovenko⁷, Chakraborti y Chakrabarti⁸, y cuyos resultados fueron verificados por medio de datos empíricos en Estados Unidos⁹, la Unión Europea¹⁰, Italia¹¹, entre otros.

Este enfoque es posible gracias a la creciente capacidad de simulación de los ordenadores y a los métodos matemáticos desarrollados en el área de los sistemas complejos, demostrando éxitos notables en la comprensión del comportamiento de sistemas con un gran número de agentes que evolucionan e interaccionan fuertemente entre sí. Por esta razón, es viable desarrollar un modelo basado en agentes para estudiar comportamientos endógenos en sistemas económicos donde actúa una entidad financiera; la investigación permite sugerir políticas de Estado que puedan ser adoptadas para la reducción de la desigualdad.

En consecuencia, el propósito de esta investigación es describir, por medio de simulaciones, qué sucede con la distribución de dinero entre agentes que ahorran una

⁵BANCO DE LA REPUBLICA. *Estadísticas de producción y circulación de billetes y monedas*. Mayo de 2019. URL: <https://www.banrep.gov.co/es/estadisticas/produccion-circulacion-de-billetes-y-monedas>.

⁶CHAKRABORTI y col., «Econophysics review: II. Agent-based models», óp.cit., pág. 2.

⁷DRĂGULESCU, Adrian y Yakovenko, Victor M. «Statistical mechanics of money». En: *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* 17.4 (2000), págs. 723-729.

⁸CHAKRABORTI, Anirban y Chakrabarti, Bikas K. «Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution». En: *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* 17.1 (2000), págs. 167-170.

⁹CLEMENTI, Fabio y Gallegati, Mauro. «Pareto's law of income distribution: Evidence for Germany, the United Kingdom, and the United States». En: *Econophysics of wealth distributions*. Springer, 2005, págs. 3-14.

¹⁰JAGIELSKI, Maciej y Kutner, Ryszard. «Modelling of income distribution in the European Union with the Fokker-Planck equation». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 392.9 (2013), págs. 2130-2138.

¹¹CLEMENTI, Fabio y Gallegati, Mauro. «Power law tails in the Italian personal income distribution». En: *Physica A: statistical mechanics and its applications* 350.2-4 (2005), págs. 427-438.

parte de su dinero en un banco que tiene la particularidad de suplir algunas deudas. A fin de comparar los resultados, se usan los MBA para estudiar la variación en los índices de desigualdad al incluir en el sistema una entidad financiera que maneja diferentes tasas de colocación y de captación.

Se ha demostrado el éxito de este método para estudiar la distribución del dinero, el ingreso y la riqueza, que inclusive al cambiar entre períodos históricos, sociedades o estructuras económicas, tienen algunas características robustas y estables independientes de la economía específica¹². Al trabajar en esta dirección, se considera que el sistema económico es complejo ya que se compone de agentes que tienen características diferentes y habitúan su conducta para mejorar sus resultados, luego, producto de estas interacciones individuales, emergen propiedades endógenas en el sistema¹³.

A pesar de que la economía es estudiada en su mayoría por economistas, matemáticos y filósofos, la econofísica aporta un enfoque diferente y novedoso para describir comportamientos en las distribuciones de dinero, ingreso, compra y venta de bienes. Esto ha sido resultado del estudio y la aplicación de MBA, siendo esta una técnica de modelado ideal para abstraer información de un sistema real. Los MBA se caracterizan por tener un grupo de agentes (personas, animales, átomos, células, etc) que interactúan con unas reglas sencillas bien definidas para la toma de sus decisiones. En este sentido, Cardoso afirma que "los MBA son herramientas útiles para estudiar el comportamiento que emerge de un sistema complejo como resultado de las características de los componentes del sistema y el funcionamiento de los mismos"¹⁴.

El trabajo pionero realizado por Dragulescu y Yakovenko¹⁵ modela un sistema económico donde agentes intercambian dinero de forma análoga a las partículas que intercambian energía en un gas ideal, estas interacciones conducen a un estado

¹²CHAKRABARTI, Anindya S y Chakrabarti, Bikas K. «Statistical theories of income and wealth distribution». En: *Economics: The Open-Access, Open-Assessment E-Journal* 4.2010-4 (2010), págs. 1-31.

¹³PATRIARCA, M y col. «Econophysics studies in Estonia». En: *arXiv preprint arXiv:1006.3708* (2010).

¹⁴CARDOSO, Carolina; Bert, Federico y Podestá, Guillermo. «Modelos Basados en Agentes (MBA): definición, alcances y limitaciones». En: *Instituto Interamericano para la investigación del cambio global* (2011), pág. 3.

¹⁵DRĂGULESCU y Yakovenko, «Statistical mechanics of money», óp.cit.

de equilibrio donde la distribución de dinero no cambia¹⁶. La implementación se hace numéricamente a través de simulaciones, en donde los agentes interactúan mediante reglas de intercambio hasta alcanzar una distribución de equilibrio. El primer artículo publicado, titulado Mecánica Estadística del Dinero, demostró que al considerar un sistema económico cerrado con esta dinámica, de las simulaciones computacionales emerge una distribución de Boltzmann-Gibbs. En un trabajo posterior Chakraborti y Chakrabarti¹⁷ consideraron en cada intercambio una restricción, al permitir que cada agente tuviera una fracción de dinero libre de riesgo que no estaba expuesta en el intercambio; en ella las distribuciones de dinero en el equilibrio son distribuciones Gamma, donde los parámetros de la función distribución son dependientes de la fracción de dinero libre de riesgo. Modelos recientes, proponen una mejora al modelo considerando una entidad (gobierno) que recaude impuestos de la población y lo redistribuya en el sistema como lo proponen Guala¹⁸ y Diniz-Mendes¹⁹.

Este estudio es particularmente conveniente para un país como Colombia que, para el año 2016 según estadísticas del banco mundial, fue catalogado como el país más desigual con un índice de Gini de 50,8 %²⁰. El índice de Gini es la medida de desigualdad de ingreso más común y mide hasta qué punto la distribución (o, en algunos casos, el gasto de consumo) entre individuos u hogares dentro de una economía, se aleja de una distribución perfectamente equitativa asignando un valor de 0 cuando todos los individuos tienen la misma riqueza (equidad perfecta) y 1 cuando un individuo tiene toda la riqueza del sistema (representado en porcentajes sería de 0 % a 100 %). A partir de lo anterior, es evidente que en Colombia se requieren estrategias que disminuyan la inequidad. Por este motivo, el siguiente trabajo pretende estudiar el efecto que tiene una entidad financiera en una economía cerrada, en la que agentes intercambien dinero aleatoriamente a partir de algunas reglas que imitan el funcionamiento real de una entidad financiera.

¹⁶VALVERDE Caramés, Pedro. «Mecánica estadística del dinero: distribución de Boltzmann-Gibbs, consecuencias termodinámicas de la limitación en las transacciones económicas». En: (2014).

¹⁷CHAKRABORTI y Chakrabarti, «Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution», óp.cit.

¹⁸GUALA, Sebastian. «Taxes in a wealth distribution model by inelastically scattering of particles». En: *Interdisciplinary Description of Complex Systems: INDECS 7.1* (2009), págs. 1-7.

¹⁹DINIZ, M y Mendes, FM. «Effects of taxation on money distribution». En: *International Review of Financial Analysis* 23 (2012), págs. 81-85.

²⁰BANCO MUNDIAL. *Base de datos sobre pobreza y desigualdad*. Jul. de 2016. URL: <http://databank.bancomundial.org/data/reports.aspx?source=2&Topic=11>.

La investigación se encamina en el estudio de la influencia de una entidad financiera con intereses de captación y colocación predeterminados en un grupo con N agentes, por tal motivo el trabajo se dispone de la siguiente manera: en la primera sección se realiza una revisión de los modelos cinéticos de distribución de dinero y se presentan las distribuciones Boltzmann-Gibbs, Gamma y Pareto que se han encontrado, así mismo se muestra el lenguaje de programación utilizado para realizar la simulación, y las diferentes formas de medir la desigualdad. Seguidamente, en la segunda sección se detalla la metodología de investigación, en la tercera sección se muestran los resultados, haciendo una comprobación de las distribuciones que diferentes autores encontraron junto a la construcción del programa que modela el sistema económico que se estudia.

En conclusión, se comprueba que la distribución de Boltzmann-Gibbs, para los tres intercambios propuestos por Dragulescu y Yakovenko, se ajusta a una economía simulada por medio de los MBA. Así mismo, en el modelo de Chakraborti y Chakraborti, cuando se tiene en cuenta propensión marginal al ahorro, para valores de λ grandes, la curva de Lorenz se acerca a línea de igualdad, es decir, cuando los agentes no arriesgan una fracción mayor de su dinero el índice de gini es menor. También, se encuentra que al incluir una entidad financiera ésta acumula el dinero del sistema ($M_E \rightarrow M$) en un tiempo denominado tiempo de saturación t_s y la evolución temporal del dinero se ajusta a una función logística. Además, cuando las tasas de interés son muy cercanas ($\varphi \rightarrow \alpha$), el tiempo de saturación se incrementa exponencialmente ($t_s(\varphi) = D_0 e^{D_1 \varphi}$).

1. MARCO REFERENCIAL

1.1. MODELOS BASADOS EN AGENTES

Los MBA son métodos de modelado y simulación computacional para el estudio de la organización y dinámica de sistemas complejos, con ellos se puede construir una sociedad artificial integrada por agentes autónomos y heterogéneos, que interactúan de modo no trivial de acuerdo a reglas bien definidas. Las simulaciones computacionales permiten examinar en tiempo real la interacción dinámica entre los agentes y recrear el proceso por el cual emergen patrones y estructuras en el entorno macro, que no son predecibles a partir de propiedades de los agentes en el entorno micro²¹.

Estos modelos permiten crear sistemas complejos semejantes a los de la realidad desde un enfoque novedoso, partiendo de lo más simple y añadiendo reglas cada vez más elaboradas con el fin de caracterizar sistemas reales. En general los MBA presentan las siguientes características:

- Están compuestos por individuos heterogéneos.
- Se pueden adaptar a los cambios en el entorno.
- El espacio geográfico puede tener una influencia significativa.
- Existen redes sociales de interacción.
- Permiten el análisis profundo de la relación existente entre los atributos y comportamientos de los individuos (la 'micro-escala') frente a las propiedades globales del grupo (la 'macro-escala')²².

²¹ZOYA, Leonardo Gabriel Rodríguez y Roggero, Pascal. «Modelos basados en agentes: aportes epistemológicos y teóricos para la investigación social». En: *Revista mexicana de ciencias políticas y sociales* 60.225 (2015), págs. 227-261.

²²IZQUIERDO, Luis R y col. «Modelado de sistemas complejos mediante simulación basada en agentes y mediante dinámica de sistemas». En: *Empiria. Revista de metodología de ciencias sociales* 16 (2008), págs. 85-112, pág. 100.

1.2. MODELOS CINÉTICOS DE DISTRIBUCIÓN DE DINERO

Como se ha expuesto, los modelos cinéticos de distribución de dinero plantean una situación análoga a la que se presenta en un gas ideal de partículas interactuantes en un sistema cerrado, donde los agentes económicos intercambian dinero de la misma forma que las partículas intercambian energía por medio de choques elásticos. Al igual que la energía cinética, el dinero se distribuye aleatoriamente de modo que es imposible predecir cuánto dinero va a tener cada agente; en cambio, lo que se puede conocer son las características que emergen al analizar el sistema como un todo, por ejemplo a partir de las interacciones entre los individuos se puede calcular la función densidad de probabilidad y ajustarla a distribuciones conocidas. Los trabajos más destacados en esta línea son los de Dragulescu y Yakovenko²³ y Chakraborti y Chakrabarti²⁴, obteniendo distribuciones de Boltzmann-Gibbs y Gamma en sus resultados; los detalles se exponen a continuación.

1.2.1. Distribución de Boltzmann-Gibbs: Dragulescu y Yakovenko

En el trabajo pionero, presentado por Dragulescu y Yakovenko en el año 2000, se estudia un sistema conformado por muchos agentes económicos ($N \gg 1$) que se pueden considerar como individuos o empresas, donde N es un valor fijo y a cada agente i se le asigna un dinero m_i . Dos agentes i y j interactúan al hacer una transacción de una cantidad Δm de dinero, el ganador aumenta su capital en la misma medida que el perdedor disminuye su dinero, es decir, se conserva el dinero en cada transacción.

$$[m_i, m_j] \rightarrow [m'_i, m'_j] = [m_i - \Delta m, m_j + \Delta m]. \quad (1.1)$$

Como la conservación de dinero es análoga a la conservación de energía en las colisiones elásticas que modelan un gas ideal, la suma del dinero de ambos agentes antes y después de la transacción es la misma

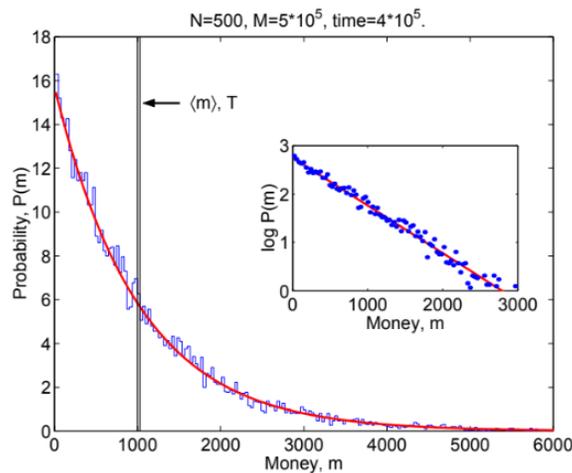
²³DRĂGULESCU y Yakovenko, «Statistical mechanics of money», óp.cit.

²⁴CHAKRABORTI y Chakrabarti, «Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution», óp.cit.

$$m_i + m_j = m'_i + m'_j, \quad (1.2)$$

es así como se considera un sistema económico cerrado aislado, es decir, no hay flujo externo de dinero y la cantidad total M en el sistema es conservado.

Figura 1: Histograma y puntos: distribución de probabilidad estacionaria de dinero $P(m)$. Curvas sólidas: se ajustan a la Boltzmann-Gibbs



Fuente: DRĂGULESCU, Adrian y Yakovenko, Victor M. The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems 17.4 (2000), pág. 724

Además, en estas simulaciones se impone la condición de no permitir deuda, esto quiere decir que $m_i \geq 0$; algo parecido a lo que sucede con la energía cinética en los átomos de un gas $\varepsilon_i \geq 0$. Al sistema se le puede asociar una función densidad de probabilidad $P(m)$ que depende de las interacciones de los átomos o los múltiples intercambios que realizan los agentes, en consecuencia la probabilidad de que un agente tenga dinero entre m y $m + dm$ es igual a $NP(m)dm$. La distribución estacionaria de $P(m)$ corresponde a un estado de equilibrio termodinámico, en donde el dinero de un agente individual fluctúa fuertemente pero la distribución de probabilidad $P(m)$ no cambia.

Esta distribución de probabilidad es conocida como la ley fundamental de la mecánica estadística del equilibrio y es la ley de Boltzmann-Gibbs, que establece que la distribución de probabilidad de energía ε es²⁵

²⁵DRĂGULESCU y Yakovenko, «Statistical mechanics of money», óp.cit.

$$P(\varepsilon) = C e^{-\varepsilon/T}, \quad (1.3)$$

donde T es la temperatura y C es una constante de normalización.

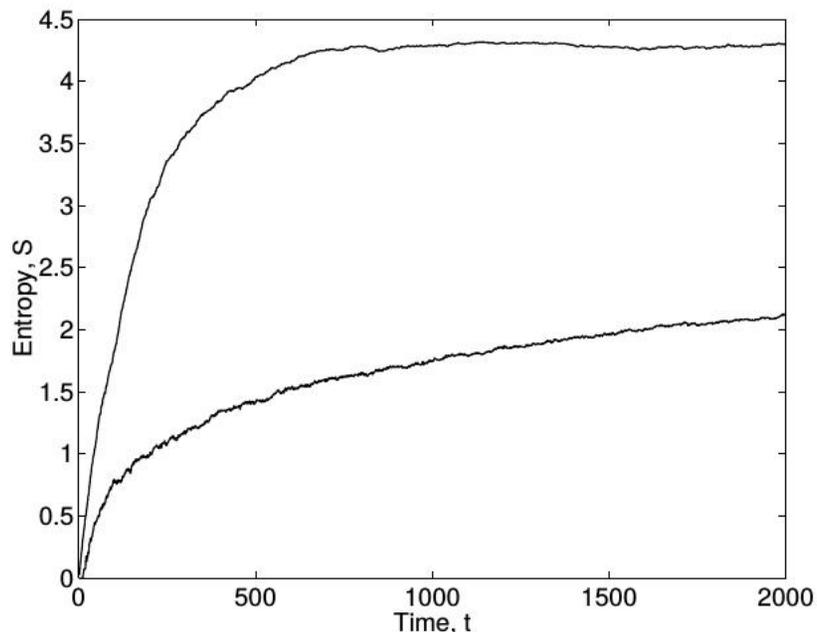
Por lo tanto, para implementar numéricamente este modelo se seleccionan pares de agentes al azar que compiten por una fracción Δm de su dinero que, al final de la transacción, es transferida del perdedor al ganador; si el perdedor no tiene suficiente dinero para pagar ($m_i < \Delta m$), entonces la transacción no se realiza, y se vuelve a tomar otro par de agentes.

En el modelo desarrollado por Dragulescu y Yakovenko se plantean 3 tipos de reglas diferentes para negociar en las simulaciones: la primera es realizar un intercambio Δm de una cantidad constante, por ejemplo $\Delta m = 1$. El segundo intercambio es una fracción aleatoria del dinero promedio del par de agentes involucrados $\Delta m = \epsilon \left(\frac{m_i + m_j}{2} \right)$, donde la fracción aleatoria se distribuye uniformemente entre $0 \leq \epsilon \leq 1$. La tercera forma de intercambiar es una fracción aleatoria del dinero promedio del sistema: $\Delta m = \epsilon \left(\frac{M}{N} \right)$; encontrándose que la distribución estacionaria final de las tres reglas es la misma y se muestra en la Figura 1.

En este trabajo se introduce la entropía como un indicador de que el sistema alcanza su estado de equilibrio, en donde la función de distribución permanece estable. En el modelo de Dragulescu y Yakovenko la distribución de Boltzmann-Gibbs es precisamente, la que garantiza máxima entropía en el sistema²⁶.

²⁶CARAMÉS, Pedro Valverde. «Econofísica. Mecánica estadística del dinero: consecuencias termodinámicas de la limitación en las transacciones económicas». En: *Economía Española y Protección Social* 7 (2015), págs. 71-103.

Figura 2: Evolución temporal de la entropía



Fuente: DRĂGULESCU, Adrian y Yakovenko, Victor M. The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems 17.4 (2000), pág. 725

En la implementación, Dragulescu y Yakovenko calcularon la entropía bajo la restricción de la conservación del dinero de la siguiente manera:

$$S = - \sum_{b=1}^{\infty} \frac{N_b}{N} \ln\left(\frac{N_b}{N}\right), \quad (1.4)$$

donde N es el total de agentes, b el intervalo (caja) y N_b es el número de agentes que hay por intervalo.

En la figura 2, se puede observar la evolución de la entropía para dos intercambios diferentes, la curva de arriba para el intercambio de una fracción aleatoria del dinero promedio en el sistema $\Delta m = \epsilon \frac{M}{N}$ y la curva de abajo para un intercambio de una cantidad fija $\Delta m = 1$. La escala de tiempo para la curva inferior es 500 veces mayor. Esto muestra que aunque tengan intercambios diferentes, el sistema eventualmente llegará al estado de máxima entropía a pesar de que en algunos intercambios se tardará mas tiempo que en otros.

1.2.2. Distribución gamma: Chakraborti y Chakrabarti

Chakraborti y Chakrabarti, en un trabajo²⁷ cercano al de Dragulescu y Yakovenko²⁸, proponen un modelo diferente donde los agentes no intercambien la totalidad de su dinero, sino que cada agente i guarde una fracción de su dinero en cada transacción, es decir, que se genere una tendencia al ahorro o una propensión al ahorro λ fija para todos los agentes del sistema.

De esta forma, se considera un sistema económico cerrado donde la cantidad total de dinero M se conserva y el número de agentes económicos N es fijo. Cada agente económico i , el cual puede ser un individuo o una empresa, posee dinero m_i y, al igual que en el caso anterior, puede intercambiar una cantidad Δm de dinero con cualquier otro agente a través de alguna operación manteniendo la cantidad total de dinero de ambos agentes conservado. En esta simulación se considera la condición de que en las interacciones cada agente económico guarde una fracción λ (fija e igual para todos los agentes del sistema) de su dinero m_i e intercambie una parte aleatoria de la restante.

Para implementar esta simulación, se eligen aleatoriamente dos agentes i y j , con dinero m_i y m_j respectivamente. Interactúan al intercambiar una fracción aleatoria del dinero que no es expuesto al intercambio, es decir,

$$\Delta m_i = \epsilon(1 - \lambda)(m_i + m_j), \quad (1.5)$$

$$\Delta m_j = (1 - \epsilon)(1 - \lambda)(m_i + m_j), \quad (1.6)$$

siendo ϵ una fracción aleatoria distribuida uniformemente entre 0 y 1 y λ la propensión al ahorro fijo en el sistema, de tal forma que se cumplen las condiciones:

$$m'_i = \lambda m_i + \Delta m_i, \quad (1.7)$$

$$m'_j = \lambda m_j + \Delta m_j, \quad (1.8)$$

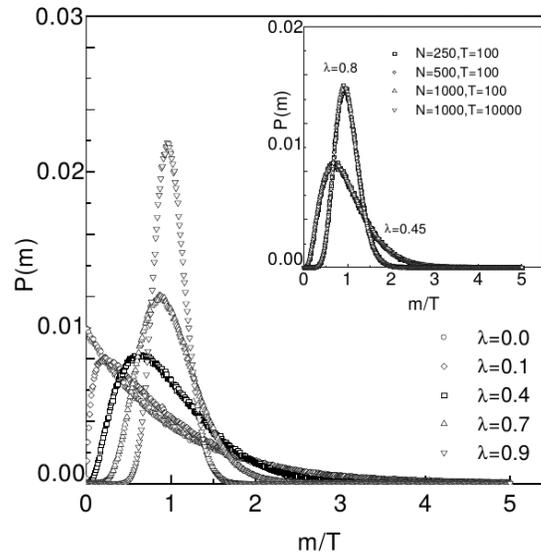
donde m'_i y m'_j representa el dinero de los agentes i y j después de la transacción. Al igual que el caso anterior se conserva el dinero, situación que se demuestra en el

²⁷CHAKRABORTI y Chakrabarti, «Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution», óp.cit.

²⁸DRĂGULESCU y Yakovenko, «Statistical mechanics of money», óp.cit.

Anexo A. Este proceso se repetirá las veces que sean necesarias hasta alcanzar la distribución de equilibrio que depende de la propensión al ahorro y se muestra en la Figura 3.

Figura 3: Distribución estacionaria de dinero para distintos lambda



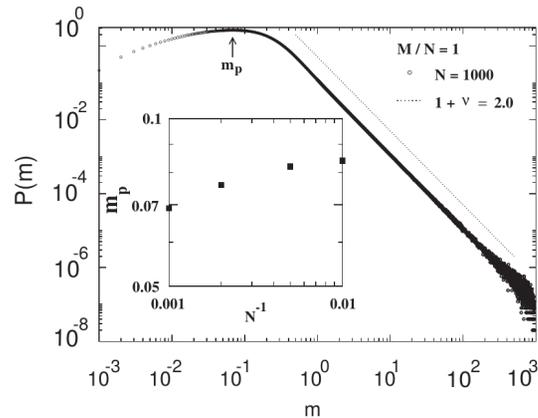
Fuente: CHAKRABORTI, Anirban y Chakrabarti, Bikas K. The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems 17.1 (2000), pág. 168

1.2.3. Distribución de Pareto: Ley de potencias

La ley o principio de Pareto también conocida como la regla 20/80, llamada así en honor al economista, filósofo y sociólogo Vilfredo Federico Pareto (1848-1923) quien la enunció por primera vez en su trabajo *Cours d'Economie Politique*²⁹, caracteriza una sociedad que se divide entre las pocas personas de ingreso alto y las muchas de bajo ingreso, algo típico en cualquier país donde menos del 20% de la población posee alrededor del 80% de la riqueza. Para población de muy alto ingreso, Pareto encontró de manera empírica la distribución de riqueza que se ajusta a una ley de potencias, el resto de la población de bajo ingreso, en efecto la mayoría, claramente siguen una ley diferente, identificada recientemente como la distribución de Boltzmann Gibbs, que se menciona en la sección 1.2.1.

²⁹PARETO, Vilfredo. *Cours d'économie politique*. Vol. 1. Librairie Droz, 1964.

Figura 4: Distribución estacionaria de dinero $P(m)$ en el modelo para lambda distribuido. En el recuadro se muestra que el pico más probable m_p tiende a 0

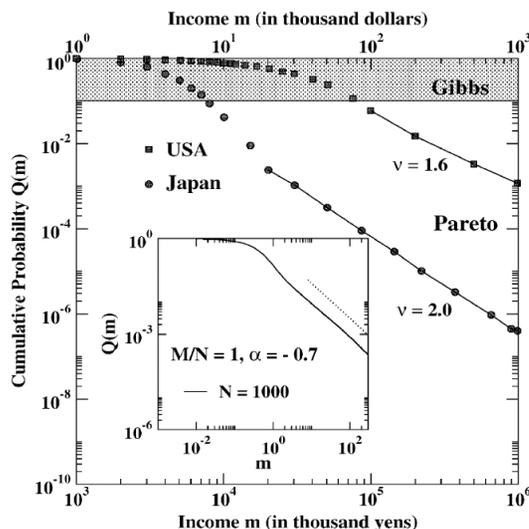


Fuente: CHATTERJEE, Arnab; Chakrabarti, Bikas K y Manna, SS. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 335.1-2 (2004), pág. 158

Chatterjee, Chakrabarti y Manna³⁰ idearon un modelo donde simulan numéricamente un gas ideal asociado a un mercado comercial donde cada agente es identificado como una molécula del gas y cada comercio como una transacción de dinero o choque elástico entre dos cuerpos. Este modelo, muy similar al expuesto en la sección 1.2.2, también hace uso del factor λ ($0 \leq \lambda < 1$) para generar una propensión al ahorro donde cada agente comercia sin la necesidad de usar todo su dinero sino que más bien se guarda una parte para él. A diferencia del modelo en la sección 1.2.2 este factor lambda, no es fijo ni igual para todos, se distribuye en los agentes de forma aleatoria, es decir, los agentes guardan una parte de su dinero y cada uno una fracción distinta.

³⁰CHATTERJEE, Arnab; Chakrabarti, Bikas K y Manna, SS. «Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 335.1-2 (2004), págs. 155-163.

Figura 5: Distribución empírica de USA y Japón



Fuente: CHATTERJEE, Arnab; Chakrabarti, Bikas K y Manna, SS. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 335.1-2 (2004), pág. 162

Como se puede observar en la figura 4, con este modelo se obtiene la distribución de Pareto, la cual se ajusta a una ley de potencias de la forma $P(m) \propto m^{-(1+v)}$ encontrada empíricamente en USA en 1997 y Japón en el 2000, resultados que se muestran en la figura 5 para la distribución acumulativa $Q(m) = \int_m^\infty P(m)dm$ de riqueza m donde el grupo de bajo ingreso sigue la ley de Gibbs (región sombreada) y el resto de la población más rica (alrededor del 5%) sigue la ley de Pareto.

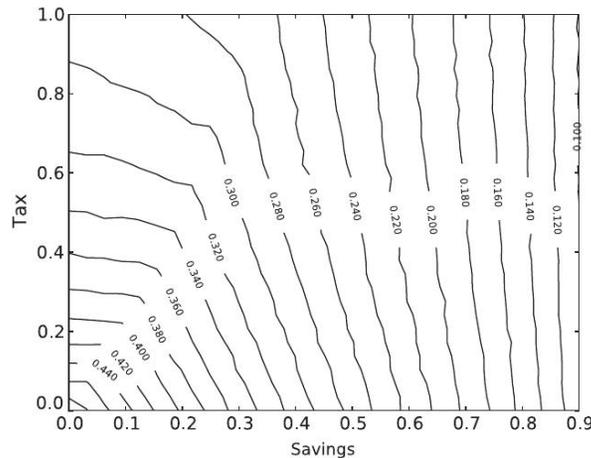
1.2.4. Efecto de los impuestos

Desde los años ochenta, los investigadores en econofísica se han interesado por entender la tendencia que tiene la riqueza de fluir hacia las manos de los que son desproporcionalmente más ricos³¹. La propuesta de Dragulescu y Yakovenko potencia el método de la simulación de modelos cinéticos, y los expone como una herramienta para estudiar la dinámica de sistemas económicos que muestran características de una economía real. Desde ese tiempo, se han creado muchos modelos con reglas de interacción económica bajo condiciones de conservación en sistemas

³¹ANGLE, John. «The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth». En: *Social Forces* 65.2 (1986), págs. 293-326.

cerrados, es decir, las interacciones son de suma cero y ocurren entre pares de agentes, que son elegidos aleatoriamente y pertenecen al mismo sistema.

Figura 6: Coeficiente de Gini en el modelo de un impuesto fijo de transferencia de dinero



Fuente: DINIZ, M y Mendes, FM. *International Review of Financial Analysis* 23 (2012), pág. 168

Sin embargo, la mayoría de los trabajos realizados por Dragulescu y Yakovenko³², Chakraborti y Chakrabarti³³, Silver y Takamoto³⁴ no asumen la existencia de un “gobierno” que recaude algún impuesto de la población y lo devuelva al sistema tiempo después en forma de bienes o servicios; solo Guala³⁵ propone una mejora al modelo de Dragulescu, considerando interacciones inelásticas en un sistema cerrado donde, la energía perdida por colisiones se capturan en otras moléculas, eso con el objetivo de emular los impuestos pagados en cada transacción comercial y luego su redistribución en el sistema.

Un artículo posterior, presentado por Diniz y Mendes³⁶, estudia el cambio en los índices de desigualdad generada por el recaudo de los impuestos. La medida de inequidad se hace por medio del índice de Gini, que es el coeficiente estándar para

³²DRĂGULESCU y Yakovenko, «Statistical mechanics of money», óp.cit.

³³CHAKRABORTI y Chakrabarti, «Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution», óp.cit.

³⁴SILVER, Jonathan; Slud, Eric y Takamoto, Keiji. «Statistical equilibrium wealth distributions in an exchange economy with stochastic preferences». En: *Journal of Economic Theory* 106.2 (2002), págs. 417-435.

³⁵GUALA, «Taxes in a wealth distribution model by inelastically scattering of particles», óp.cit.

³⁶DINIZ y Mendes, «Effects of taxation on money distribution», óp.cit.

la medición de la desigualdad en un sistema económico. En este trabajo se investiga cómo la distribución del dinero se ve afectada por un gobierno que recauda un porcentaje de impuestos en cada transacción y devuelve equitativamente la cantidad recaudada entre todos los agentes del sistema. Para cada combinación de ahorro y porcentaje de impuesto, se calcula el índice de Gini asociado a la distribución de dinero estacionaria como se muestra en la figura 6. En consecuencia, los autores añaden nuevas condiciones que permiten simular o recrear el impacto de una política económica en la distribución de la riqueza.

1.3. LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN C++

Para la implementación de los modelos se utilizó el lenguaje de programación C++, debido su uso general con un sesgo hacia la programación de sistemas que soporta³⁷:

- Abstracción de datos
- Programación orientada a objetos
- Programación genérica

Proviene como su propio nombre indica del lenguaje de programación C. En 1980 Bjarne Stroustrup (1950-Actual) añade características como las *clases* (resultado de la evolución de estructuras), tres años más tarde lo rediseñan e introducen: *funciones virtuales*, *sobrecarga de funciones* y *operadores*. En ese mismo año Rick Mascitti propone el nombre C++ y, tras refinamientos y modificaciones menores este nuevo lenguaje aparece documentado y listo para su uso por parte de la población en general ese año.³⁸

Posteriormente, las múltiples revisiones dieron lugar a añadir nuevas características como: la *herencia múltiple*, *funciones miembro static y const*, *miembros protected*, *tipos de datos genéricos o plantillas*, y la *manipulación de excepciones*. El éxito alcanzado por el lenguaje fue arrollador por lo que se vio en la necesidad de promover

³⁷STROUSTRUP, Bjarne. *El lenguaje de programación C++*. Addison-Wesley, 2007.

³⁸STROUSTRUP, Bjarne. *The design and evolution of C++*. Pearson Education India, 1994.

su estandarización internacional. En 1989 se convocó el comité del Instituto Nacional Estadounidense de Estándares por sus siglas en inglés ANSI que más tarde entró a formar parte de la Organización Internacional de Estandarización por sus siglas en inglés ISO. El trabajo conjunto de estos comités permitió publicar en 1998 el estándar ISO C++ (ISO/IEC 14882) de forma que el lenguaje pasó a ser estable y el código generado utilizable por distintos compiladores y en distintas plataformas.³⁹

Dentro de esta estandarización se incluye un conjunto de clases, algoritmos y plantillas que constituyen la librería estándar de C++. Esta librería introduce facilidades para manejar las entradas y salidas del programa, para la gestión de listas, pilas, colas, vectores, para tareas de búsqueda y ordenación de elementos, para el manejo de operaciones matemáticas complejas, gestión de cadenas de caracteres, tipos de datos genéricos, etc. A este conjunto de algoritmos, contenedores y plantillas, se los denomina habitualmente por las siglas STL (Standard Template Library).⁴⁰

El resultado de todo ello es un potente lenguaje de programación y la programación orientada a objetos. Un lenguaje mejor que C, soportando la abstracción de datos, y la programación genérica gracias a las plantillas.

1.4. FORMAS DE MEDIR LA DESIGUALDAD

Entre economistas, politólogos y otros interesados en el tema de medir la desigualdad, es usual encontrar tres formas de asignar un número para realizar la medición. Estas son: *el coeficiente de Gini, el índice Theil y el índice Palma*. Las tres medidas con ventajas y desventajas en el cálculo de la desigualdad⁴¹.

³⁹Ibíd.

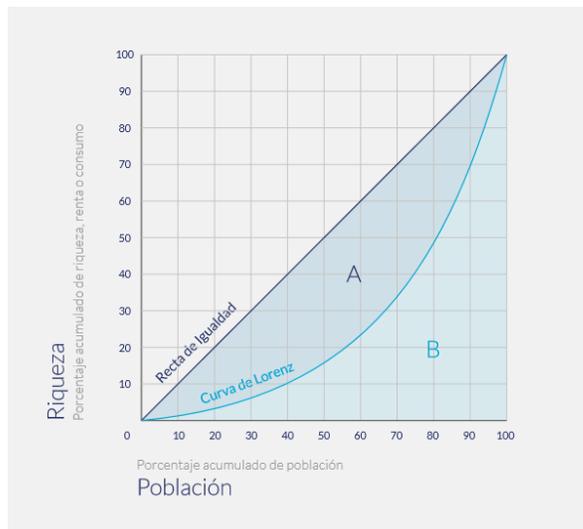
⁴⁰Ibíd.

⁴¹CASTAÑEDA, Diego. *¿Cómo se mide la desigualdad y por qué es importante saberlo?* México: Forbes, 2013. URL: <https://www.forbes.com.mx/como-se-mide-la-desigualdad-y-por-que-es-importante-saberlo/>.

1.4.1. Índice de Gini

Es la más famosa medición de desigualdad relativa. Parte de la construcción de la curva de Lorenz, donde se relacionan los porcentajes acumulados de ingreso contra los porcentajes acumulados de población. El espacio comprendido entre la curva de Lorenz y una línea recta de 45°, conocida como línea de igualdad perfecta (una relación 1 a 1 entre ingreso y población), indica el grado de desigualdad de la distribución, es decir, entre mayor es la distancia entre la curva de Lorenz y la línea de igualdad (el espacio A en la gráfica), mayor es la desigualdad en dicha sociedad.

Figura 7: Recta de igualdad y curva de Lorenz



Fuente: Tomado de URL: <https://www.clublibertaddigital.com/ilustracion-liberal/66/la-desigualdad-en-espana-mitos-y-realidades-instituto-juan-de-mariana.html>

Para transformar esta observación en una medición utilizable para la comparación y el desarrollo de políticas públicas, se calcula la razón entre el área en medio de la línea de igualdad y la curva de Lorenz (A), y el área total debajo de la línea de igualdad perfecta (B). El resultado es un número entre 0 y 1, donde 0 es la igualdad absoluta y 1 la inequidad absoluta.

Esta medida se puede hallar así

$$G = \left| 1 - \sum_{k=1}^{n-1} (X_{k+1} + X_k)(Y_{k+1} - Y_k) \right|, \quad (1.9)$$

donde X es la proporción acumulada de la población y Y la proporción acumulada del dinero.

También se puede hallar por medio de la siguiente ecuación refiriéndose a la figura 7.

$$G = \frac{A}{A + B}. \quad (1.10)$$

1.4.2. Índice de Theil

El segundo índice usado es el llamado índice Theil, el cual está basado en el concepto de entropía tomado de la termodinámica y aplicado a la información. Esta medición es una medida del “desorden” o entropía presente en un sistema, entre mayor es el orden, menor es la entropía y existe mayor igualdad; en cambio, entre mayor es el desorden, mayor es la entropía y menor es la igualdad.

Esta medición, aunque es arbitraria, es una aplicación derivada directamente de la física y la teoría de la información para su aplicación en la economía. Es muy bien aceptada entre los que estudian la desigualdad y durante mucho tiempo ha sido una medición alternativa al coeficiente Gini.

1.4.3. Índice Palma

La tercera medición es el índice Palma, la más joven de estas mediciones, desarrollada y promovida en gran medida por investigadores del Kings College London. Si bien las dos mediciones anteriores son muy útiles y han tenido éxito en sus estimaciones, estas fallan en capturar los extremos de la desigualdad, otorgándole un mayor peso a las clases medias y por tanto produciendo resultados que no reflejan los cambios en igualdad entre los deciles más bajos y los más altos. Adicionalmente, el Palma ha sido propuesto como una mejor medida para comunicación en términos

de economía política, pues ilustra con mucha claridad la brecha de ingresos entre los extremos.

La estimación del Palma es la razón del ingreso del 10 % más alto de la distribución (decil X) entre el ingreso del 40 % más bajo (los deciles I,II,III y IV). Este resultado arroja una medida que refleja qué tanto cambia la dispersión del ingreso entre los extremos de la distribución. Un Palma grande implica que el 10 % más rico (decil X) incrementa su diferencia con el 40 % más pobre (deciles I, II, III y IV), un Palma bajo implica un cierre de esta brecha.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1. ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN

El presente trabajo de investigación sigue una metodología cuantitativa con enfoque exploratorio y correlacional, fundamentado en los MBA aplicando teoría cinética de gases. Este enfoque cuantitativo, está orientado al análisis de un sistema económico cerrado con unas características específicas, como lo son: el ahorro de dinero en los agentes y la presencia de una entidad financiera.

Dado que el enfoque cuantitativo es de tipo exploratorio en este proyecto la metodología analiza la riqueza, profundidad y calidad de la información, y no la cantidad y estandarización de la misma⁴²; se busca describir el modo en que cada individuo interactúa con los demás y con la entidad, de esta manera, exponer características endógenas que sirvan para entender un sistema económico cuando se realizan ahorros y préstamos.

2.2. RUTA METODOLÓGICA

Estudio de las distribuciones de dinero

En este trabajo se reproducen los resultados de los distintos modelos cinéticos de distribución propuestos por Dragulescu-Yakovenko y Chakraborti-Chakrabarti, considerando las distintas reglas de mercado manejadas por los agentes que simulan un sistema económico. De los resultados obtenidos, primero se grafican las distribuciones con su respectivo ajuste a una función, para luego compararlas con los resultados de los autores, por último, se estudian las distribuciones obtenidas de datos empíricos publicados a partir de encuestas a individuos u hogares, con el fin de validar las suposiciones que se hacen en las simulaciones.

⁴²SAMPIERI, Roberto Hernández. *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw Hill Mexico, 2018.

Cálculo de la entropía

Por medio de los datos obtenidos se calculó la entropía de Gibbs, que es un indicador para establecer el tiempo de simulación donde se alcanza la distribución de equilibrio.

Cálculo del índice de Gini

A partir de los datos obtenidos al reproducir los modelos cinéticos de Dragulescu-Yakovenko y Chakraborti-Chakrabarti, se obtiene la curva de Lorenz que representa la concentración de ingreso gráficamente. Luego, se calcula el área bajo la curva para obtener el índice de Gini.

Representación gráfica

Se estudia el comportamiento en el tiempo del dinero de los agentes y del banco.

3. RESULTADOS Y ANÁLISIS

3.1. DISTRIBUCIONES DE BOLTZMANN-GIBBS Y GAMMA

En esta sección se verifican los resultados de los trabajos pioneros, encontrados por Dragulescu-Yakovenko⁴³ y Chakraborti-Chakrabarti⁴⁴, relacionados con los modelos cinéticos de distribución de dinero. Las simulaciones se implementan en lenguaje de programación c++ ya que permite optimizar el tiempo de simulación y facilita el manejo de bases de datos.

3.1.1. Boltzmann - Gibbs

3.1.1.1. Detalles de simulación En el trabajo presentado por Dragulescu y Yakovenko, se consideraron 3 diferentes intercambios que ajustaban, con gran precisión, a una distribución de Boltzmann-Gibbs. El algoritmo que se construyó para reproducir este trabajo, se muestra en la figura 8. En el diagrama de flujo se presentan los pasos que realiza el programa para encontrar la distribución. Inicialmente se establece un sistema de $N = 500$ agentes con dinero $M = 5 \times 10^5$, a cada uno se le asigna el dinero promedio del sistema, $\bar{m} = 10^3$. En el segundo paso se fija la cantidad de intercambios (tiempo) que se van a ejecutar en la simulación; en los resultados mostrados se toma un tiempo de $t = 4 \times 10^5$. En el tercer paso se seleccionan dos agentes aleatoriamente i y j , para luego intercambiar una cantidad $\Delta m = \epsilon \left(\frac{m_i + m_j}{2} \right)$ (que es uno de los 3 tipos de intercambio establecidos por Dragulescu y Yakovenko sección 1.2.1) si el agente perdedor j cumple la condición $m_j \geq \Delta m$. El procedimiento se repite 4×10^5 -veces desde el tercer paso hasta encontrar una distribución que no cambie con el tiempo, como se muestra en la figura 9.

Todo el proceso mostrado en el diagrama de flujo (figura 8) y descrito anteriormente se repite 10^3 veces. En cada repetición se calcula un histograma y al final del programa se promedian para obtener una distribución de probabilidad estacionaria suavizada. En el Anexo B.1, se presenta el código que reproduce dicho trabajo.

⁴³DRĂGULESCU y Yakovenko, «Statistical mechanics of money», óp.cit.

⁴⁴CHAKRABORTI y Chakrabarti, «Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution», óp.cit.

Figura 8: Diagrama de flujo para simulación de la distribución de Boltzmann-Gibbs

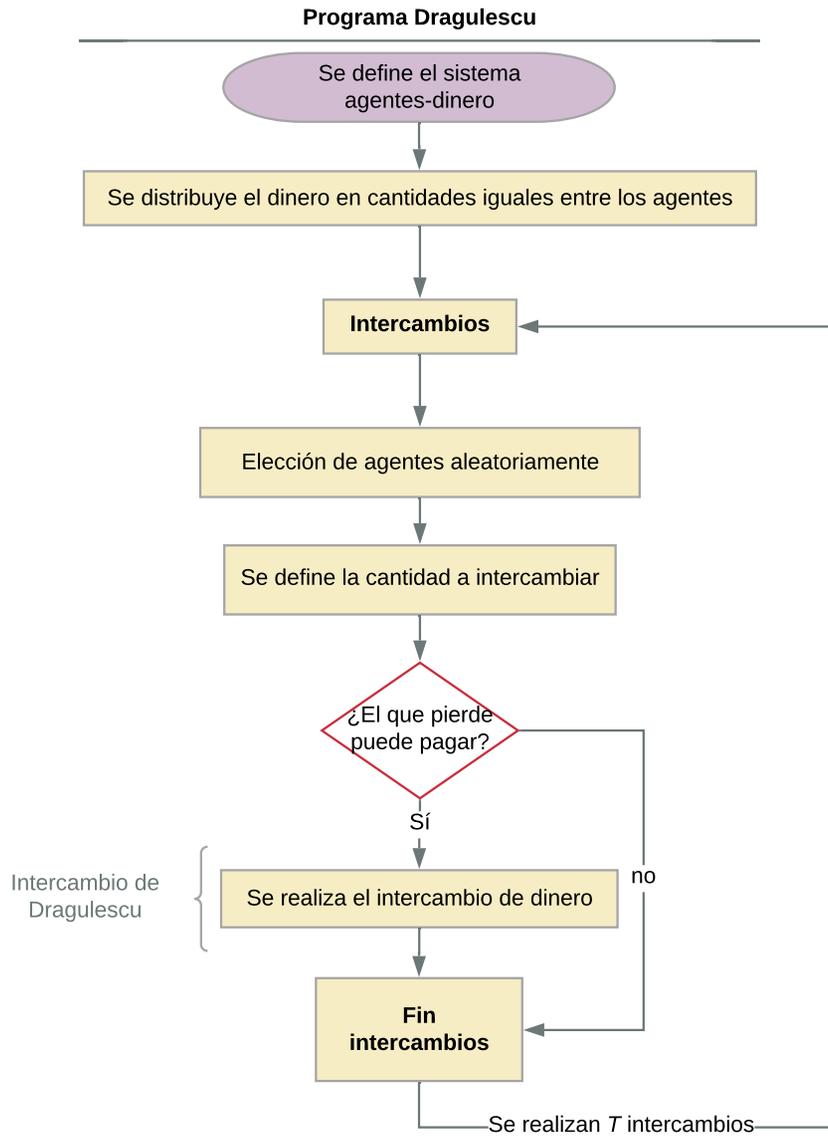
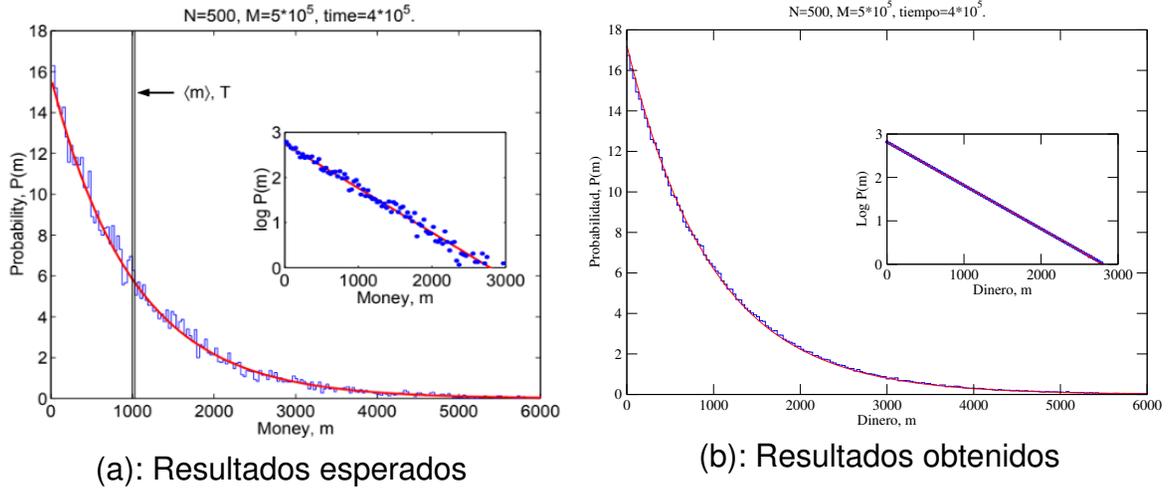


Figura 9: Histograma y puntos: distribución de probabilidad estacionaria de dinero $P(m)$



Fuente: DRĂGULESCU, Adrian y Yakovenko, Victor M. The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems 17.4 (2000), pág.724

3.1.1.2. Revisión de resultados En la figura 9 se muestra la comparación entre la distribución encontrada por Dragulescu y Yakovenko (a) y la distribución encontrada al reproducir su trabajo repitiendo la simulación 10^3 veces (b).

Como era de esperarse, los resultados se ajustan a una distribución de Boltzmann-Gibbs (ecuación 1.3) en el que la temperatura efectiva es el dinero promedio del sistema ($T = M/N$) y, al igual que a la ley de Gibbs. Para distribución de energía, el dinero (m) de los agentes se distribuye acorde a una distribución de Boltzmann-Gibbs $P(m) = Ce^{-m/T}$.

El ajuste muestra una constante de normalización igual a $A_0 = 16.6764$, muy cercana a la esperada para la distribución discreta, que se calcula considerando la suma de los rectángulos bajo la curva de la función debe ser el número de agentes, es decir,

$$\sum_{n=0}^{M/dm} A_0 e^{-\frac{ndm}{T}} = N, \quad (3.1)$$

como se definió $dm = M \times 0.0068\%$ (usualmente denominado *bin*) y las demás constantes ya están definidas, de la ecuación 3.1 se puede hallar el valor teórico $A_0 = 16.7142$ que corresponde a un error de 0.23%.

Tabla 1: Ajuste a función de Boltzmann-Gibbs

Función:	$P(m) = A_0 e^{-A_1 m}$
Constantes:	$A_0 = 16.6764$
	$A_1 = 0.000996912$
Chi-cuadrado:	0.507278
Coefficiente de correlación:	0.999929
Error relativo RMS:	2.11711
Coefficiente u de Theil:	0.0109335

Además, se puede encontrar el porcentaje de error de la constante A_1 obtenida en la tabla 1; como teóricamente $A_1 = 1/T$ y experimentalmente $T \approx 1003.1$ lo que indica un error de 0.31 %.

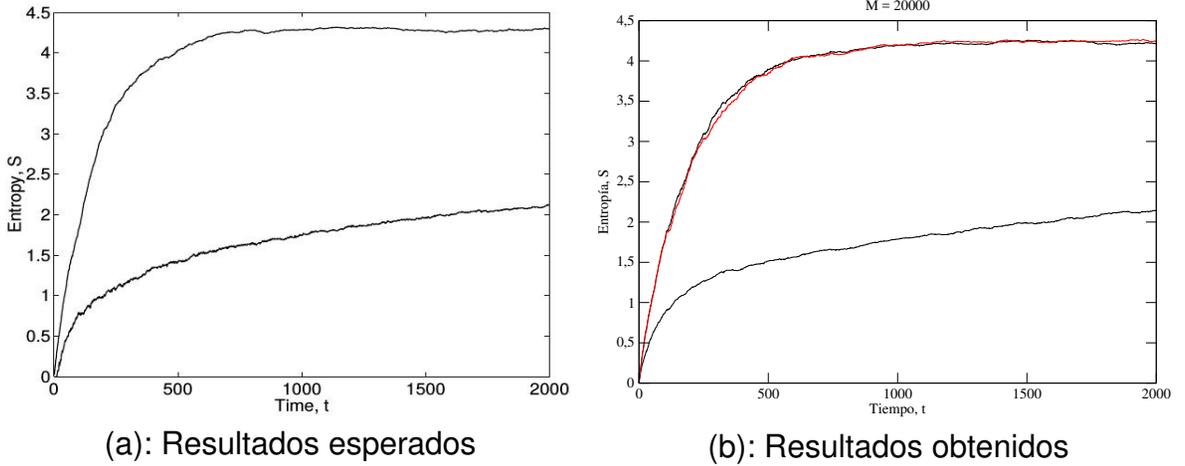
3.1.1.3. Entropía En su trabajo, Dragulescu y Yakovenko utilizaron la entropía como referencia para encontrar la distribución estacionaria, debido a que cuando es máxima, el sistema llega al equilibrio; calcular la entropía permite conocer el tiempo en que la distribución no cambia y establecer hasta qué punto se ejecuta el programa. En la figura 10(a) se muestra la evolución temporal de la entropía encontrada por Dragulescu y Yakovenko y en la figura 10(b) la evolución de la entropía del programa con los tres intercambios Δm diferentes a partir del programa mostrado en el anexo B.1, código 3, en donde la línea 18 especifica la forma de calcular la entropía (ecuación 1.4).

Según los resultados, la entropía crece en el tiempo dependiendo del tipo de intercambio que se realice, para $\Delta m = \epsilon \bar{m}$ y $\Delta m = \epsilon \frac{(m_i + m_j)}{2}$ el tiempo es el mismo, en cambio, para $\Delta m = 1$, es decir, una cantidad fija se necesita más tiempo (alrededor de 500 veces más), como se observa en la figura 9(b). Sin embargo, la entropía tiene la misma forma funcional independiente del tipo de intercambio.

Desde el punto de vista de la teoría de la información, la entropía se define como la medida de incertidumbre de una variable aleatoria, en este caso el dinero: “Cuando comienzan a intercambiar dinero, la distribución se vuelve asimétrica y alcanza en el equilibrio su máxima entropía, es decir, el sistema evoluciona hasta que la información que se requiere para conocer la cantidad de dinero que tiene cada agente es máxima”⁴⁵. De lo anterior, se establece que al emplear variables aleatorias en los

⁴⁵SANTOS Niño, Alexander y col. «Estudio del papel del ahorro en las distribuciones de dinero

Figura 10: Evolución temporal de la entropía. Curva superior negra: para el intercambio de una fracción aleatoria del dinero promedio del sistema: $\Delta m = \epsilon(\frac{M}{N})$. Curva superior roja: para el intercambio de una fracción aleatoria del dinero promedio de los agentes $\Delta m = \epsilon(\frac{m_i+m_j}{2})$. Curva inferior: para el intercambio de una pequeña cantidad constante $\Delta m = 1$.



Fuente: DRĂAGULESCU, Adrian y Yakovenko, Victor M. The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems 17.4 (2000), pág. 725

intercambios, el sistema va a alcanzar su máxima entropía más rápido que al considera un intercambio de un cantidad fija $\Delta m = 1$; en la que se conoce la información del dinero de los agentes (múltiplos de 1).

3.1.2. Gamma

Dragulescu y Yakovenko lograron demostrar, a partir de la ecuación de Boltzmann que, para cualquier intercambio que conserve simetría inversa en el tiempo, la distribución de Boltzmann Gibbs permanece estacionaria. Esto se prueba al reemplazar la función densidad de probabilidad $P(m) = Ce^{-m/T}$ en la ecuación de Boltzmann,

$$\frac{dP(m)}{dt} = \int \int \{ -\omega_{1[m,m'] \rightarrow [m-\Delta, m'+\Delta]} P(m) P(m') + \omega_{2[m-\Delta, m'+\Delta] \rightarrow [m, m']} P(m-\Delta) P(m'+\Delta) \} dm' d\Delta, \quad (3.2)$$

y riqueza mediante herramientas de la física teórica». En: *Universidad Nacional de Colombia-Sede Bogotá* (dic. de 2016). Tesis de Maestría, pág. 21.

donde ω_1 es la razón de transferencia de dinero Δ de un agente con dinero m a un agente con dinero m' . Si las dos razones de transferencia ω_1 y ω_2 son iguales, el término de la derecha en la ecuación 3.2 se cancela y la distribución es estacionaria. Aunque este modelo es simple e interesante para relacionar los resultados con las distribuciones empíricas, le falta un componente muy habitual para cualquier agente económico real: No es usual que un agente realice transacciones poniendo en riesgo todo su dinero sin ahorrar una parte del mismo⁴⁶. Por esta razón Chakraborti y Chakrabarti agregaron al modelo una tendencia al ahorro, que es una característica común en los agentes de una economía; de hecho, los economistas la llaman “propensión marginal a ahorrar”⁴⁷.

3.1.2.1. Detalles de simulación Se define un sistema cerrado con un número de agentes $N = 500$ y dinero total $M = 500$ (como se muestra en la figura 11). Se reparte el dinero en cantidades iguales entre los agentes del sistema, así, cada agente tiene un dinero inicial $\bar{m} = 1$, además, cada agente conserva una fracción λ de su dinero libre de riesgo en el intercambio. Ahora se seleccionan al azar dos agentes m_i y m_j para intercambiar una fracción aleatoria del dinero que no tienen ahorrado, lo que corresponde a un intercambio

$$\Delta m = (1 - \lambda)[m_i - \epsilon(m_i + m_j)],$$

siendo ϵ una fracción aleatoria entre $(0, 1)$ y λ la fracción de dinero libre de riesgo (en el anexo A se encuentra la deducción del intercambio). De esta manera, al agente i se le resta la cantidad Δm de dinero y al agente j se le suma esa misma cantidad (anexo B.2 línea 9 y 10). En este caso, contrario a lo que sucede con el anterior modelo, se debe conservar esta dirección de intercambio por lo que las razones de transferencia ω_1 y ω_2 son distintas. Luego, nuevamente se repite la misma selección y el intercambio hasta maximizar la entropía de Gibbs (como se muestra en la figura 12).

⁴⁶CHAKRABORTI y Chakrabarti, «Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution», óp.cit.

⁴⁷SAMUELSON, PA. «Economics. 11th edn McGaw-Hill». En: *New York* (1980), pág. 415.

Figura 11: Diagrama de flujo para simulación de la distribución Gamma

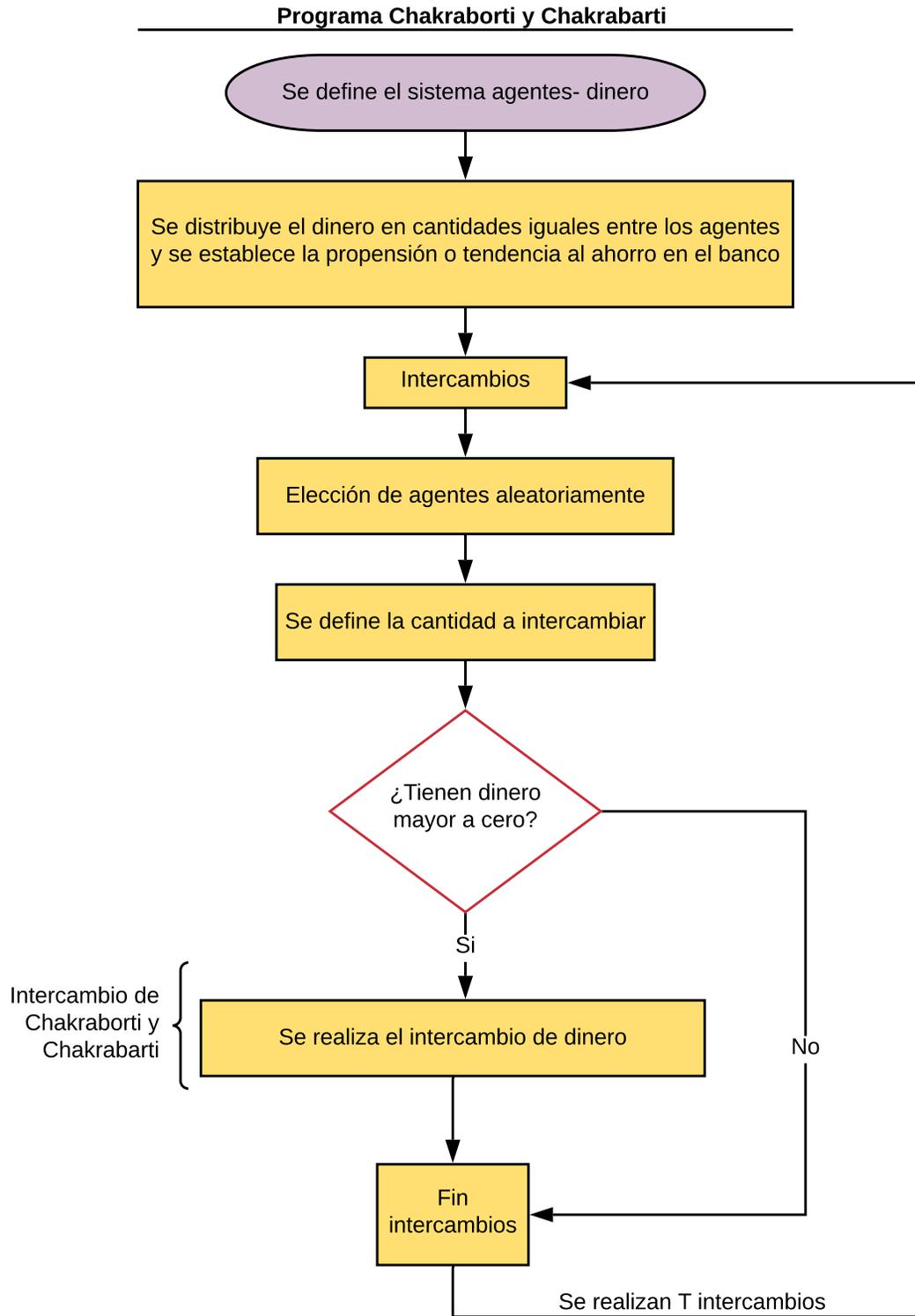
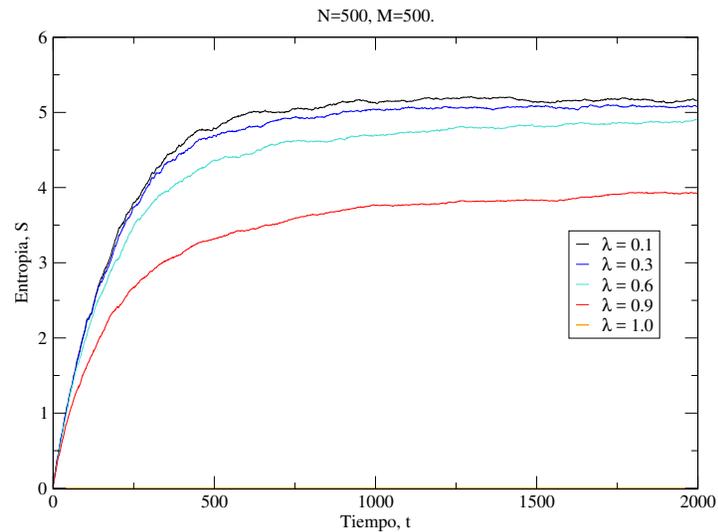


Figura 12: Comportamiento en el tiempo del valor de la entropía para los distintos valores de propensión al ahorro en el modelo cinético de Chakrabarti-Chakraborti



La cantidad λ es constante y no depende de los agentes, en este modelo cuando $\lambda = 0$, en el equilibrio se obtiene la distribución de Boltzmann-Gibbs (figura 15), donde es más probable que al finalizar existan muchos agentes con poco dinero. En la figura 15 se realiza la comparación de los resultados encontrados por Chakraborti-Chakraborti y los resultados al reproducir su trabajo con diferentes valores de propensión al ahorro (figura 15(b)). Comprobando de esta manera que, para $\lambda \neq 0$, la forma de la distribución cambia y emerge una configuración donde el máximo de la distribución (el dinero más probable) no desaparece para cada agente en el mercado⁴⁸.

En la figura 13, se muestra la curva de Lorenz para diferentes valores de λ , con el fin de utilizarla para tener una medida de la desigualdad en el sistema como se ha visto en la sección 1.4. En la gráfica, para valores de λ grandes, la curva de Lorenz se acerca a la línea de igualdad, es decir, cuando los agentes ahorran una cantidad mayor de su dinero en el sistema el índice de Gini es menor (figura 13 y figura 14).

⁴⁸CHAKRABORTI y Chakraborti, «Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution», óp.cit.

Figura 13: Curva de Lorenz variando la propensión al ahorro λ y línea de equidad

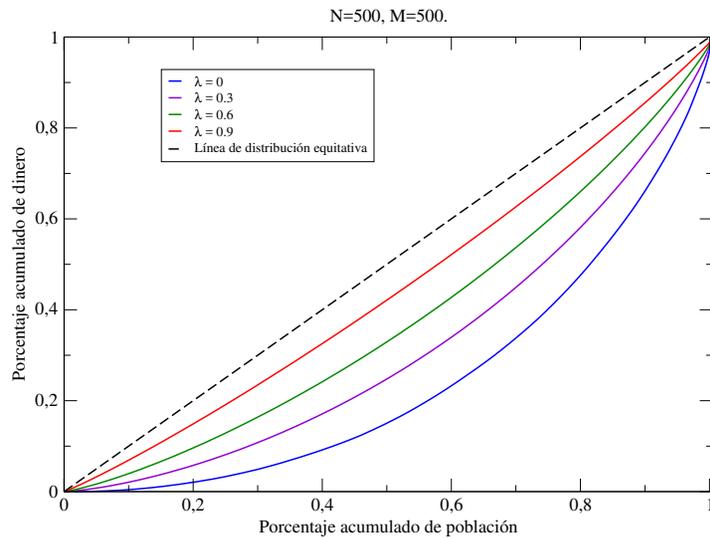
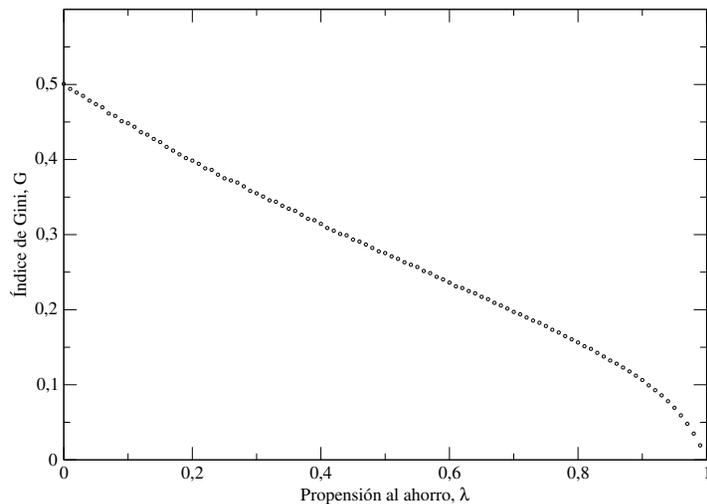


Figura 14: Relación entre el índice de Gini con distintos valores de propensión al ahorro λ .



3.1.2.2. Confrontación de distribuciones La temperatura es definida como la cantidad de dinero promedio en el sistema $T = M/N$; en el modelo de Chakraborti-Chakrabarti, el promedio se estableció en $T = 100$ (figura 15(a)), en cambio nosotros definimos $T = 1$ para diferentes de valores de N encontrando la misma distribución, por lo que se evidencia una ausencia de efecto de tamaño finito y la distribución se sigue manteniendo robusta, constante en el tiempo e independiente de la tempera-

tura, como lo reportaron Chakraborti y Chakrabarti⁴⁹.

La distribuciones de dinero con valores de $\lambda \neq 0$ se ajustan a la función

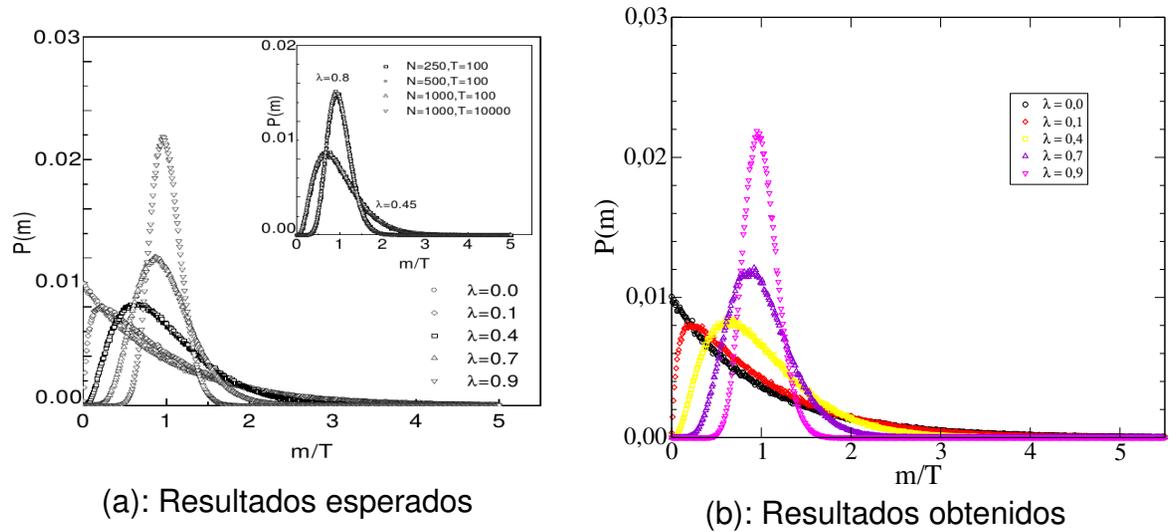
$$f_n(x) = a_n x^{n-1} e^{-\frac{nx}{\langle x \rangle}}, \quad (3.3)$$

donde n y a_n dependen de la propensión al ahorro λ

$$n(\lambda) = 1 + \frac{3\lambda}{1-\lambda}, \quad (3.4)$$

$$a_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{n}{\langle x \rangle} \right)^n. \quad (3.5)$$

Figura 15: Distribución estacionaria de dinero $P(m)$ versus dinero m_i para diferentes factores de propensión al ahorro λ ($N = 500, M = 500$).



Fuente: CHAKRABORTI, Anirban y Chakrabarti, Bikas K. The European Physical-Journal B-Condensed Matter and Complex Systems 17.1 (2000), pág. 168

⁴⁹Ibíd.

En la siguiente tabla se muestran las constantes A_0 y A_1 que ajustan a la distribución con $\lambda = 0.7$.

Tabla 2: Ajuste a función Gamma para $\lambda = 0.7$

Función:	$f(x) = A_0 x^{A_1-1} e^{-A_1 x}$
Constantes:	$A_0 = 26.8791$
	$A_1 = 7.794$
Chi-cuadrado:	2.99886×10^{-6}
Coefficiente de correlación:	0.999794
Error relativo RMS:	2.07945
Coefficiente u de Theil:	0.0189221

3.2. DATOS EMPÍRICOS

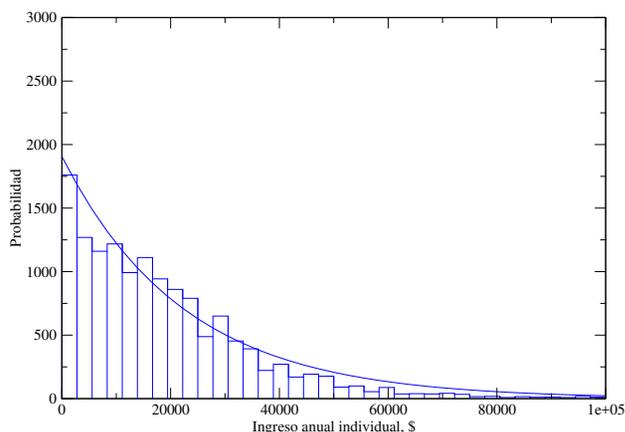
Con el fin de dar un soporte empírico que valide el fundamento teórico, se comparan las distribuciones simuladas con distribuciones de datos obtenidos por medio de encuestas en organizaciones dedicadas a este oficio, como el Panel de Estudio de Dinámica de Ingresos PSID por sus siglas en inglés y la conocida revista Forbes. Las anteriores son fuentes confiables que permiten acceder a esta información para realizar las distribuciones empíricas.

El Survey Research Center de la Universidad de Michigan, elabora el PSID recolectando información a familias estadounidenses por medio de encuestas longitudinales que miden varios factores económicos, sociales y de salud. Entre los factores económicos hacen seguimiento al ingreso, riqueza y otras variables a lo largo de la vida de las familias y sus generaciones desde 1968.

Forbes es una revista de negocios estadounidense que presenta artículos originales sobre temas de finanzas, industria, entre otros. En los temas de finanzas publican listas y clasificaciones de los estadounidenses más ricos, la conocida lista *Forbes 400* en la que en orden descendente presentan la fortuna de 400 personas.

Entre los datos que recolectan y procesan en el PSID hay encuestas de ingreso

Figura 16: Distribución de probabilidad de ingreso de individuos afiliados al PSID en el año 1994, la línea sólida se ajusta a una función exponencial.



Fuente: MICHIGAN, University. *PANEL STUDY OF INCOME DYNAMICS*. 1994. URL: <https://psidonline.isr.umich.edu>

laboral para un grupo de individuos afiliados⁵⁰, de allí se descargó la variable V30821 “Total labor income”, en la que individuos respondieron a la pregunta: ¿Qué tanto ingreso tuvo el año pasado con respecto al trabajo que realizó?, los resultados se muestran en el histograma de la figura 16.

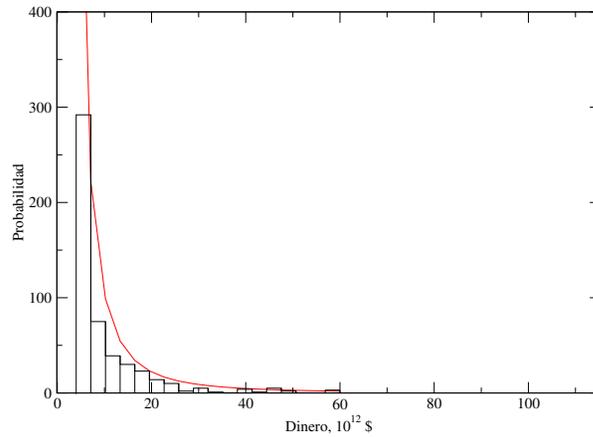
Tabla 3: Número de datos y parámetros de ajuste obtenidos de la función exponencial para los datos del ingreso de individuos. PSID-1994.

N	A_0	A_1
29275	2507	5.8×10^{-5}

La distribución se ajusta a una función exponencial $f(x) = A_0 e^{-A_1 x}$ (tabla 3), como la obtenida en la figura 9. Sin embargo, para valores muy grandes de dinero, esta distribución tiende a cero, lo que indica que la probabilidad de encontrar a un individuo con mucho dinero es nula, situación que no se presenta en la realidad donde se observa una doble distribución, en las figuras 4 y 5 se observa que la distribución de

⁵⁰MICHIGAN, University. *PANEL STUDY OF INCOME DYNAMICS*. 1994. URL: <https://psidonline.isr.umich.edu>.

Figura 17: Distribución de probabilidad de ingreso para los 400 más ricos de USA del año 2018 según la revista Forbes. La línea sólida se ajusta a una ley de potencias.



Fuente: FORBES. *Forbes 400*. 2018. URL: <https://www.forbes.com/forbes-400>

Tabla 4: Número de datos y parámetros de ajuste obtenidos para la distribución de Pareto obtenida de los datos de Forbes 400 del 2018

N	A_0	A_1
400	19651	2.97

riqueza se comporta como la ley de Boltzmann-Gibbs para bajos ingresos y la Ley de Pareto para altos. Si se analiza el grupo de personas más ricas, obtenido de la lista Forbes 400⁵¹, se obtiene la distribución mostrada en la figura 17, que se ajusta a una ley de potencias de la forma $P(x) = A_0x^{-A_1}$, donde A_0 y A_1 son parámetros (tabla 4).

⁵¹FORBES. *Forbes 400*. 2018. URL: <https://www.forbes.com/forbes-400>.

3.3. ENTIDAD FINANCIERA

Entendidos los modelos anteriores se tienen bases necesarias para ampliar la visión del trabajo, por lo tanto, con el fin de simular una economía que se aproxime a un sistema real, se incluye el funcionamiento de una entidad con características particulares que son propias de la dinámica financiera. La variable ξ hace referencia a la fracción de dinero que los agentes ahorran en la entidad financiera (el ahorro es el mismo para cada agente), α la tasa de interés compuesto de la deuda conocido como interés de colocación (ecuación 3.6), φ la tasa de interés que recibe el agente por tener su dinero ahorrado comúnmente denominado interés de captación (ver ecuación 3.7) y β el porcentaje ingreso del agente que es abonado a la deuda, β en éste estudio se fija $\beta = 1$ (ecuación 3.8).

En comparación con los anteriores estudios, aquí se permite la deuda de los agentes que se incrementa como un interés compuesto de la forma,

$$d_{t,n} = d_{0,n}(1 + \alpha)^t, \quad (3.6)$$

donde $d_{0,n}$ representa la deuda inicial del agente n y $d_{t,n}$ la deuda con el interés compuesto de colocación del agente n en el t -ésimo intercambio.

El interés de captación, a diferencia del anterior, es un dinero que la entidad paga a los agentes

$$c_n = \varphi \xi m_n, \quad (3.7)$$

c_n es el interés de captación ganado por el ahorro del agente n .

Por último, se establece el porcentaje en el que se debe pagar el préstamo, que depende del dinero m_n del agente n con deuda,

$$pago = \beta m_n. \quad (3.8)$$

El dinero del sistema es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} M &= M_A + M_E \\ &= M_A(1 + \xi), \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde M_E es el dinero de los agentes ahorrado en la entidad financiera, y M_A el dinero de “bolsillo” que tienen los agentes. Si es necesario contar con el dinero de la entidad financiera para hacer un intercambio, se realiza una transacción entre las cuentas de los agentes, lo que implica que no hay restricciones para usar el dinero que está ahorrado y la entidad financiera se encarga de administrar el dinero de los agentes.

3.3.1. Detalles de la simulación

El algoritmo que reproduce la simulación es el siguiente (en la figura 18 se ilustra el proceso llevado a cabo):

1. Inicialmente se define el sistema, se fija el número de agentes N , el dinero del sistema M y la fracción de ahorro de los agentes ξ . Por lo tanto el dinero con el que cuenta la entidad es ξM .
2. En el segundo paso, se reparte el dinero en cantidades iguales entre los agentes $m_n = M_A/N$, y se establecen las distintas tasas de interés de colocación α y de captación φ .
3. El banco interviene para:
 - a) Asignar el interés de colocación: incrementar su deuda en un factor α .
 - b) Pagar el interés de captación: dinero ganado por los agentes al ahorrar, por lo que $m'_n = m_n + c_n$.
4. ¿La entidad tiene suficiente dinero para pagar captación?
 - a) Si: Pague.
 - b) No: No pague.

5. Se eligen los agentes aleatoriamente.
6. Se define la cantidad a intercambiar Δm .
7. Si se cumple la condición $m_j > \Delta m$ se realiza el intercambio clásico.
8. No obstante, si no cumple la anterior condición, el banco le presta el dinero que le falta (*préstamo* = $\Delta m - m_j$) si no tiene ninguna deuda con el banco $d_{t,j} = 0$.
9. La entidad financiera cobra si el agente tiene dinero y deuda, de acuerdo a las siguientes condiciones:
 - a) Si $m_n \geq d_{t,n}$ entonces se abona todo el dinero a la deuda, por lo que $m'_n = 0$.
 - b) En cambio, si $m_n > d_{t,n}$ queda sin deuda y $m'_n = m_n - d_{t,n}$.
10. La deuda de los que no cumplan la condición anterior aumenta de acuerdo con, $d_{t,n} = d_{t-1,n}(1 + \alpha)$.

El código diseñado se encuentra en el anexo B.3.

Figura 18: Diagrama de flujo para simulación de la entidad

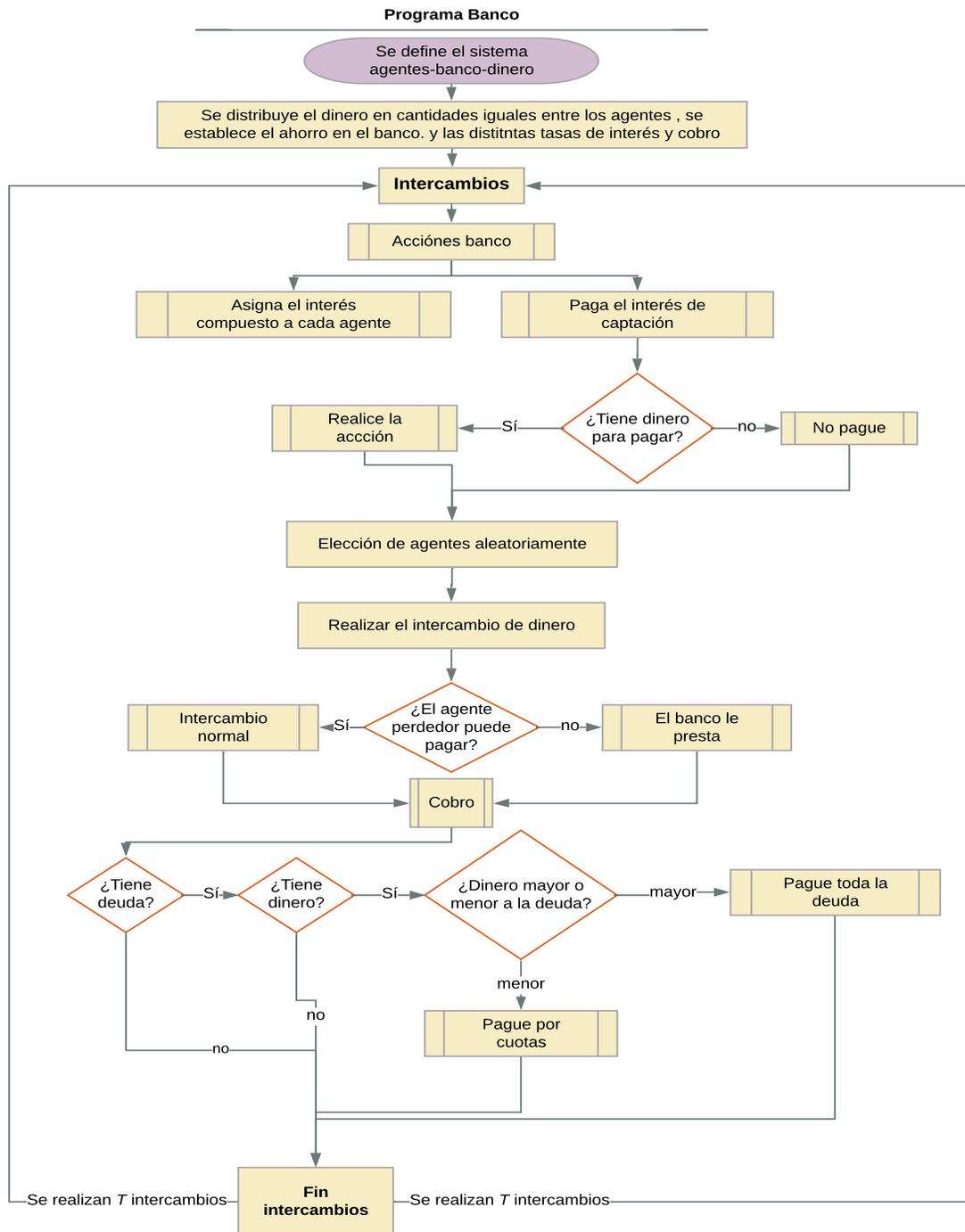
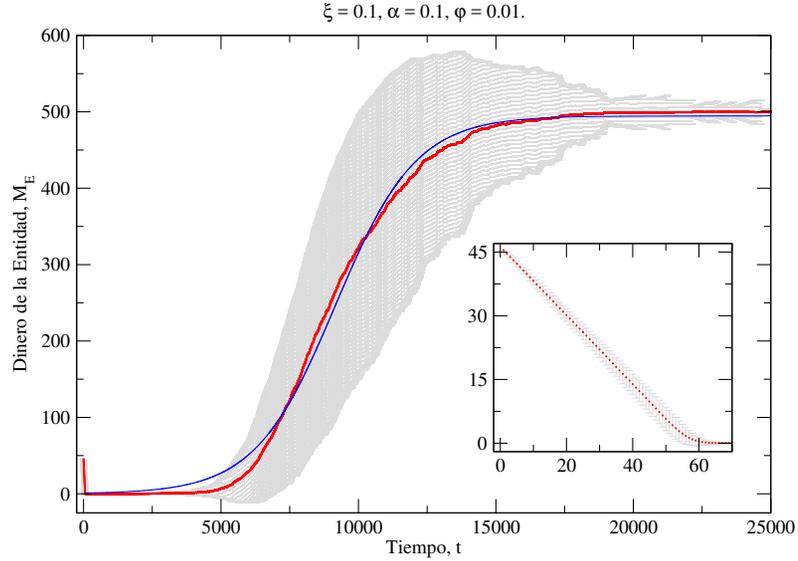


Figura 19: Evolución temporal del dinero de la entidad. En el recuadro se muestra el comportamiento inicial.



3.3.2. Resultados obtenidos

Cuando se incluye el banco en este sistema de intercambios, la entidad tiende a acumular todo el dinero del sistema bajo la condición $\alpha > \varphi$ (tal como lo establecen las entidades) y por lo tanto la distribución de dinero no es estacionario. Sin embargo, resulta interesante estudiar el comportamiento temporal del dinero de "bolsillo" que ingresa al banco producto del desequilibrio que implica cobrar más por prestar que el pagado por ahorrar. El resultado se muestra en la figura 19, en donde se observa una gráfica del dinero de la entidad en función de los pasos de simulación. La gráfica inicia solo decreciendo hasta cierto tiempo denominado de cambio (t_c) y a partir de allí la función es creciente. El tiempo entre el inicio y el tiempo de cambio se denominará tiempo muerto ($t_0 \leq t_m \leq t_c$) y al tiempo en el que la entidad reúna el dinero del sistema se denominará tiempo de saturación t_s .

El tiempo muerto es pequeño con respecto al tiempo de saturación, y durante este primero la entidad financiera presta todo el dinero ahorrado por los agentes. Como se puede observar en el recuadro de la figura 19 una vez superado el tiempo muerto el comportamiento es similar al crecimiento de una función logística,

$$L(t) = \frac{M}{1 + C_1 C_2^t}, \quad (3.10)$$

Tabla 5: Ajuste a función Logística

Función:	$L(x) = \frac{C_0}{1+C_1C_2^x}$
	$C_0 = 494.664$
Constantes:	$C_1 = 521.366$
	$C_2 = 0.999318$
Chi-cuadrado:	2.42867×10^6
Coefficiente de correlación:	0.999054
Error relativo RMS:	8.81914
Coefficiente u de Theil:	0.0262771

donde M es el dinero del sistema, C_1 y C_2 parámetros de ajuste que toman los valores mostrados en la tabla 5. El hecho de que se ajuste a una función logística, implica que la entidad en un tiempo $t \rightarrow \infty$ se quedará con el dinero del sistema, de acuerdo al ajuste se obtiene un error de 1.07%.

Además, se evidencia que el dinero de los agentes M_A se comporta inversamente al dinero de la entidad M_E , puesto que el dinero se conserva, si uno aumenta el otro obligatoriamente tiene que disminuir, así existe la posibilidad de hallar cuando los agentes se van a la quiebra por medio de una regresión logística.

Es interesante observar el efecto que tienen las variables propuestas (tasas de interés y ahorro) en la evolución temporal del dinero del sistema, tanto del banco como de los agentes. En la figura 20 se muestra el tiempo de saturación para diferentes factores de ahorro; la gráfica se ajusta a una función cuadrática dada por:

$$t_s(\xi) = a\xi^2 + b\xi + c, \quad (3.11)$$

Señalando que entre mayor es la fracción de ahorro, el dinero de “bolsillo” se mantiene en el sistema un mayor tiempo, es decir, la entidad tarda más en acumular el dinero del sistema M . En el caso límite, Si los agentes no ahorran, se obtendría el modelo estudiado anteriormente por Dragulescu y Yakovenko, debido a que la entidad no dispondría de dinero para realizar su función, así que la gráfica que se muestra está acotada desde un ahorro de $\xi = 0.01$ al que le corresponde un tiempo de saturación de 63.41 . Cuando se ahorra la totalidad del dinero en el banco, el tiempo de saturación es 2.24×10^5 , que es razonable por el hecho de restringir las transacciones dentro de la entidad.

Figura 20: Variación del ahorro ξ con su respectivo tiempo de saturación t_s

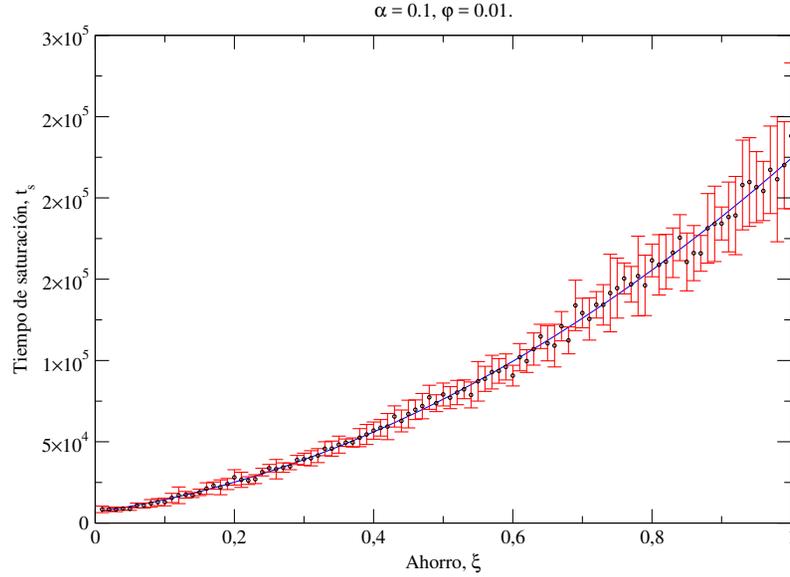


Tabla 6: Ajuste del ξ vs tiempo de saturación

Función:	$t_s(\xi) = a\xi^2 + b\xi + c$
	$a = 168.969$
Constantes:	$b = 131.356$
	$c = 63.4135$
Chi-cuadrado:	1.65188×10^{-20}
Coefficiente de correlación:	1.000000
Error relativo RMS:	1.32904×10^{-16}
Coefficiente u de Theil:	1.15836×10^{-16}

En la figura 21, se calcula el tiempo de saturación para diferentes intereses de captación; como este último es menor al de colocación en una economía real ($\varphi < \alpha$), se decidió variar hasta un límite superior cercano al valor de φ , resultando la figura 21, en la que se observa un crecimiento exponencial del tiempo de saturación. La relación que describe este crecimiento está dada por

$$t_s(\varphi) = D_0 e^{D_1 \varphi}, \quad (3.12)$$

donde D_0 y D_1 son parámetros de ajuste que se encuentran en la tabla 7.

Figura 21: Variación del interés de captación φ con su respectivo tiempo de saturación t_s

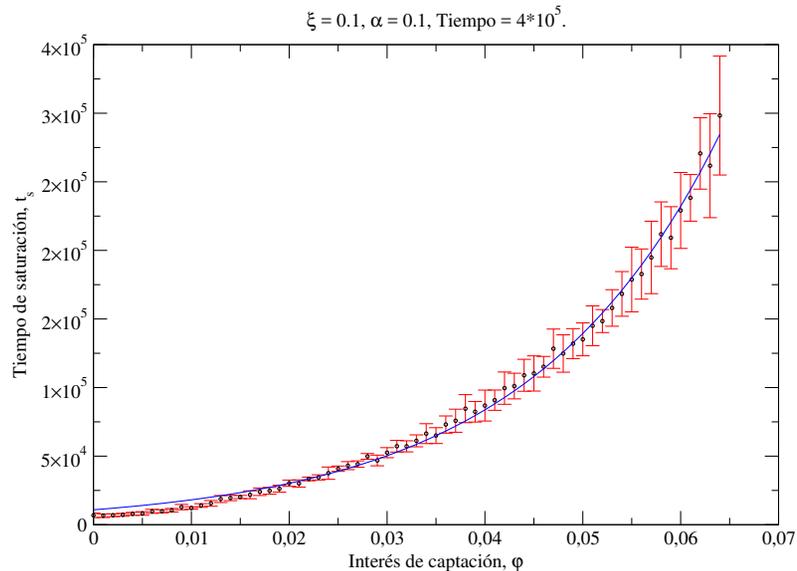


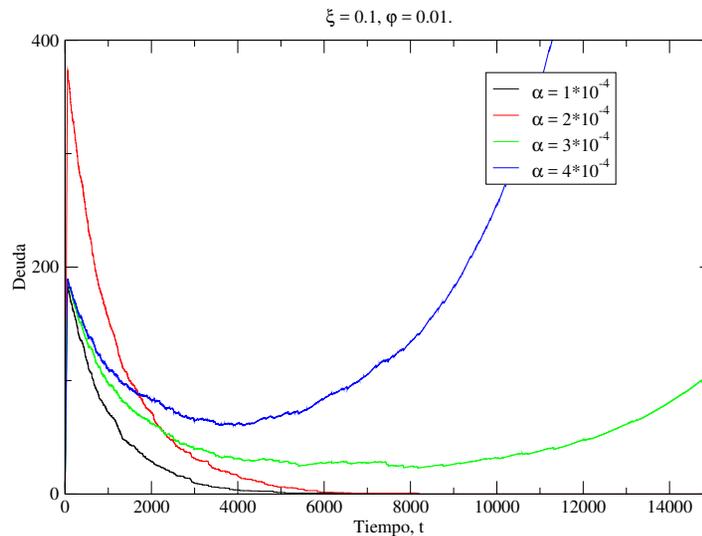
Tabla 7: Ajuste del φ vs tiempo de saturación

Función:	$t_s(\varphi) = D_0 e^{D_1 \varphi}$
Constantes:	$D_0 = 10899.1$
	$D_1 = 50.9797$
Chi-cuadrado:	1.58864×10^9
Coefficiente de correlación:	0.997959
Error relativo RMS:	0.268061
Coefficiente u de Theil:	0.0435773

Según los resultados obtenidos, la entidad eventualmente se quedará con el dinero del sistema, sin embargo, el tiempo en el que lo hace (t_s) depende de la relación entre el ahorro y las tasas de interés. Para encontrar alguna combinación entre las tasas de interés, que no permitan la acumulación de dinero en la entidad se estudió la deuda del sistema, en la figura 22 se observa el comportamiento en el límite encontrado para valores de α .

La deuda del sistema permite saber si la entidad aún tiene dinero por ganar o si llegó a la quiebra, debido a que la única forma de aportar dinero de bolsillo a la entidad es que el agente, al mismo tiempo, tenga una deuda y sea el ganador en un intercambio, si eso no sucede, la entidad no tiene como acumular el dinero del sistema. En el caso contrario, si en el sistema hay deuda significa que los agentes están aún intercambiando dinero que no les pertenece, el comportamiento de la deuda es exponencial y en cada paso de tiempo va aumentando en un factor α , si

Figura 22: Deuda de los agentes en cada paso de tiempo.



el agente no es elegido para ser ganador en un tiempo razonable, ese agente ya no podrá salir de su deuda con la entidad por lo que se verá obligado en un futuro a pagar todo lo que gane a la entidad.

Por otro lado, si en el sistema no hay una deuda creciente sino decreciente significa que los agentes ya no harán uso del banco y seguirán intercambiando con el dinero de ellos, es decir, el dinero M_A llamado dinero de “bolsillo” será el dinero del sistema y la entidad no podrá acumular este dinero y que quedará en bancarrota. Se dice que el dinero de la entidad colapsa hacia la bancarrota y no sigue las relaciones encontradas con anterioridad para las distintas tasas de interés (ecuaciones 3.10, 3.11 y 3.12).

Algunos autores han encontrado diversos métodos para poder crear un modelo de alerta temprana de predicción de crisis financieras ya sea para empresas o entidades (específicamente bancos) en economías desarrolladas o no⁵². Algunos de los métodos propuestos son: el método de discriminante multivariante, PROBIT, redes neuronales, regresión logística (LRM), Zeta, Hazard, árbol de decisiones, entre otros.

⁵²HASSAN, Ehsan ul; Zainuddin, Zaemah y Nordin, Sabariah. «A Review of Financial Distress Prediction Models: Logistic Regression and Multivariate Discriminant Analysis». En: *Indian-Pacific Journal of Accounting and Finance* 1.3 (2017), págs. 13-23.

A pesar de que no se pudo encontrar una distribución de probabilidad se obtuvo el mismo comportamiento funcional del modelo LRM en el dinero del sistema, uno de los más usados de los distintos métodos nombrados anteriormente⁵³. Si se habla específicamente de la entidad definida en este proyecto como un banco, se puede encontrar que, según la clasificación de riesgo de bancarrota propuesta por Taha⁵⁴, se ubica en el grupo sano debido a que su tendencia es acumular dinero, sin embargo, para ciertas tasas de interés, como por ejemplo $\alpha \leq \frac{\varphi}{100}$ su ubicación se vuelve la de un banco no sano en el que su tendencia es la bancarrota.

⁵³Ibíd.

⁵⁴ZAGHDOUDI, Taha. «Bank failure prediction with logistic regression». En: *International Journal of Economics and Financial Issues* 3.2 (2013), págs. 537-543.

4. CONCLUSIONES

- Se comprueba que la distribución de Boltzmann-Gibbs, para los tres intercambios propuestos por Dragulescu y Yakovenko, se ajusta a una economía simulada por medio de los MBA.
- La máxima entropía en el equilibrio permite establecer el tiempo en el que la distribución de equilibrio es estacionaria.
- El índice de Gini encontrado para la distribución de Boltzmann-Gibbs es de 0.500636 con un error porcentual de 0.13 %.
- En el modelo de Chakraborti y Chakrabarti, cuando se tiene en cuenta propensión marginal al ahorro, para valores de λ grandes, la curva de Lorenz se acerca a línea de igualdad, es decir, cuando los agentes no arriesgan una fracción mayor de su dinero el índice de gini es menor.
- Cuando se incluye una entidad financiera ésta acumula el dinero del sistema ($M_E \rightarrow M$) en un tiempo denominado tiempo de saturación t_s y la evolución temporal del dinero se ajusta a una función logística.
- Entre más ahorren los agentes el tiempo de saturación t_s aumenta cuadráticamente de acuerdo a $t_s(\xi) = a\xi^2 + b\xi + c$.
- Cuando las tasas de interés son muy cercanas ($\varphi \rightarrow \alpha$), el tiempo de saturación se incrementa exponencialmente ($t_s(\varphi) = D_0 e^{D_1 \varphi}$).
- Si el interés de colocación α es menor al de captación φ en dos ordenes de magnitud la entidad tiende a la bancarrota, para el caso contrario solo tiende a acumular el dinero del sistema $M_E \rightarrow M$.
- La evolución temporal del dinero en la entidad tiene la misma forma funcional del modelo LRM usado para evaluar la probabilidad de bancarrota, el cual se emplea con mayor frecuencia debido a que realiza las mejores predicciones en este campo.

5. RECOMENDACIONES

- Realizar un estudio empírico de distribución de dinero en Colombia donde se encuentren los patrones característicos encontrados en otros países.
- Analizar la evolución de las distribuciones de dinero cuando está presente una entidad financiera.
- Variar el porcentaje de cobro y estudiar sus efectos en el tiempo de saturación.
- Calcular el valor del índice de Gini en cada tiempo para encontrar en qué tiempo es mínimo y en qué tiempo es máximo.
- Incluir un curso de programación ofrecido a los programas de licenciatura de la Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación.
- Adquirir una estación de trabajo con especificaciones técnicas de tecnología avanzada para optimizar el tiempo de cálculo de las simulaciones.

BIBLIOGRAFÍA

ANGLE, John. «The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth». En: *Social Forces* 65.2 (1986), págs. 293-326.

BANCO DE LA REPUBLICA. *Estadísticas de producción y circulación de billetes y monedas*. Mayo de 2019. URL: <https://www.banrep.gov.co/es/estadisticas/produccion-circulacion-de-billetes-y-monedas>.

BANCO MUNDIAL. *Base de datos sobre pobreza y desigualdad*. Jul. de 2016. URL: <http://databank.bancomundial.org/data/reports.aspx?source=2&Topic=11>.

CARAMÉS, Pedro Valverde. «Econofísica. Mecánica estadística del dinero: consecuencias termodinámicas de la limitación en las transacciones económicas». En: *Economía Española y Protección Social* 7 (2015), págs. 71-103.

CARDOSO, Carolina; BERT, Federico y PODESTÁ, Guillermo. «Modelos Basados en Agentes (MBA): definición, alcances y limitaciones». En: *Instituto Interamericano para la investigación del cambio global* (2011).

CASTAÑEDA, Diego. *¿Cómo se mide la desigualdad y por qué es importante saberlo?* México: Forbes, 2013. URL: <https://www.forbes.com.mx/como-se-mide-la-desigualdad-y-por-que-es-importante-saberlo/>.

CHAKRABARTI, Anindya S y CHAKRABARTI, Bikas K. «Statistical theories of income and wealth distribution». En: *Economics: The Open-Access, Open-Assessment E-Journal* 4.2010-4 (2010), págs. 1-31.

CHAKRABORTI, Anirban y CHAKRABARTI, Bikas K. «Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution». En: *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* 17.1 (2000), págs. 167-170.

CHAKRABORTI, Anirban; TOKE, Ioane Muni; PATRIARCA, Marco y ABERGEL, Frédéric. «Econophysics review: II. Agent-based models». En: *Quantitative Finance* 11.7 (2011), págs. 1013-1041.

CHATTERJEE, Arnab; CHAKRABARTI, Bikas K y MANNA, SS. «Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 335.1-2 (2004), págs. 155-163.

CLEMENTI, Fabio y GALLEGATI, Mauro. «Pareto's law of income distribution: Evidence for Germany, the United Kingdom, and the United States». En: *Econophysics of wealth distributions*. Springer, 2005, págs. 3-14.

CLEMENTI, Fabio y GALLEGATI, Mauro. «Power law tails in the Italian personal income distribution». En: *Physica A: statistical mechanics and its applications* 350.2-4 (2005), págs. 427-438.

DINIZ, M y MENDES, FM. «Effects of taxation on money distribution». En: *International Review of Financial Analysis* 23 (2012), págs. 81-85.

DRĂGULESCU, Adrian y YAKOVENKO, Victor M. «Statistical mechanics of money». En: *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* 17.4 (2000), págs. 723-729.

FORBES. *Forbes 400*. 2018. URL: <https://www.forbes.com/forbes-400>.

GARCÍA, José Ignacio y Valdecasas Medina. «La simulación basada en agentes: una nueva forma de explorar los fenómenos sociales». En: *Revista Española de Investigaciones Sociológicas (REIS)* 136.1 (2011), págs. 91-109.

GUALA, Sebastian. «Taxes in a wealth distribution model by inelastically scattering of particles». En: *Interdisciplinary Description of Complex Systems: INDECS 7.1* (2009), págs. 1-7.

HASSAN, Ehsan ul; ZAINUDDIN, Zaemah y NORDIN, Sabariah. «A Review of Financial Distress Prediction Models: Logistic Regression and Multivariate Discriminant Analysis». En: *Indian-Pacific Journal of Accounting and Finance* 1.3 (2017), págs. 13-23.

IZQUIERDO, Luis R; ORDAX, Jos Manuel Galán; SANTOS, Joséé I y MARTINEZ, Ricardo Del Olmo. «Modelado de sistemas complejos mediante simulación basada en agentes y mediante dinámica de sistemas». En: *Empiria. Revista de metodología de ciencias sociales* 16 (2008), págs. 85-112.

JAGIELSKI, Maciej y KUTNER, Ryszard. «Modelling of income distribution in the European Union with the Fokker–Planck equation». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 392.9 (2013), págs. 2130-2138.

LARROSA, Juan Manuel. «Agentes computacionales y análisis económico». En: *Revista de Economía Institucional* 18.34 (2016), págs. 87-113.

MICHIGAN, University. *PANEL STUDY OF INCOME DYNAMICS*. 1994. URL: <https://psidonline.isr.umich.edu>.

PARETO, Vilfredo. *Cours d'économie politique*. Vol. 1. Librairie Droz, 1964.

PATRIARCA, M; HEINSALU, E; KITT, R y KALDA, J. «Econophysics studies in Estonia». En: *arXiv preprint arXiv:1006.3708* (2010).

SAMPIERI, Roberto Hernández. *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw Hill Mexico, 2018.

SAMUELSON, PA. «Economics. 11th edn McGaw-Hill». En: *New York* (1980).

SANTOS NIÑO, Alexander y col. «Estudio del papel del ahorro en las distribuciones de dinero y riqueza mediante herramientas de la física teórica». En: *Universidad Nacional de Colombia-Sede Bogotá* (dic. de 2016). Tesis de Maestría.

SCHINCKUS, Christophe. «Is econophysics a new discipline? The neopositivist argument». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 389.18 (2010), págs. 3814-3821.

SILVER, Jonathan; SLUD, Eric y TAKAMOTO, Keiji. «Statistical equilibrium wealth distributions in an exchange economy with stochastic preferences». En: *Journal of Economic Theory* 106.2 (2002), págs. 417-435.

STROUSTRUP, Bjarne. *El lenguaje de programación C++*. Addison-Wesley, 2007.

STROUSTRUP, Bjarne. *The design and evolution of C++*. Pearson Education India, 1994.

VALVERDE CARAMÉS, Pedro. «Mecánica estadística del dinero: distribución de Boltzmann-Gibbs, consecuencias termodinámicas de la limitación en las transacciones económicas». En: (2014).

ZAGHDOUDI, Taha. «Bank failure prediction with logistic regression». En: *International Journal of Economics and Financial Issues* 3.2 (2013), págs. 537-543.

ZOYA, Leonardo Gabriel Rodríguez y ROGGERO, Pascal. «Modelos basados en agentes: aportes epistemológicos y teóricos para la investigación social». En: *Revista mexicana de ciencias políticas y sociales* 60.225 (2015), págs. 227-261.

ANEXOS

A. CÁLCULO CONSERVACIÓN DE DINERO CHAKRABORTI

Se consideran dos agentes i y j con dinero m_i y m_j que realizan un intercambio Δm aleatorio definido por una fracción ϵ ($0 < \epsilon < 1$). En el modelo de Chakraborti, una fracción (λ) del dinero total de cada agente se ahorra y la restante se pone en juego para el intercambio (λ tiene valores entre 0 y 1). De esta manera se tiene que

$$m_i = (1 - \lambda)m_i + \lambda m_i, \quad (\text{A.1})$$

donde $(1 - \lambda)m_i$ es la fracción de dinero que pone en juego el agente i y λm_i es la fracción libre de riesgo. Del mismo modo, para el agente j se tiene:

$$m_j = (1 - \lambda)m_j + \lambda m_j, \quad (\text{A.2})$$

Ahora la suma de las dos partes que se ponen en juego para el intercambio es:

$$(1 - \lambda)(m_i + m_j) \quad (\text{A.3})$$

A esta cantidad se tomara una fracción aleatoria ϵ de modo que:

$$\Delta m_i = \epsilon(1 - \lambda)(m_i + m_j) \quad (\text{A.4})$$

$$\Delta m_j = (1 - \epsilon)(1 - \lambda)(m_i + m_j) \quad (\text{A.5})$$

Así después del intercambio se tiene:

$$[m_i, m_j] \rightarrow [m'_i, m'_j] = [\lambda m_i + \Delta m_i, \lambda m_j + \Delta m_j] \quad (\text{A.6})$$

Esto muestra que cada agente va quedar con la cantidad de dinero ahorrado mas una fracción aleatoria del dinero que ponen en juego.

Para m'_i se tiene:

$$m'_i = \lambda m_i + \Delta m_i$$

$$m'_i = \lambda m_i + \underbrace{\epsilon(1 - \lambda)(m_i + m_j)}_{\text{reemplazando(A.4)}} + \overbrace{(1 - \lambda)m_i - (1 - \lambda)m_i}^{\text{sumando un cero adecuado}}$$

$$m'_i = m_i + \epsilon(1 - \lambda)(m_i + m_j) - (1 - \lambda)m_i$$

$$m'_i = m_i - \underbrace{(1 - \lambda)[m_i - \epsilon(m_i + m_j)]}_{\text{Fracción de dinero intercambiada}} \quad (\text{A.7})$$

$$m'_i = m_i - \Delta m \quad (\text{A.8})$$

Para m'_j se tiene:

$$m'_j = \lambda m_j + \Delta m_j$$

$$m'_j = \lambda m_j + \underbrace{(1 - \epsilon)(1 - \lambda)(m_i + m_j)}_{\text{reemplazando(A.5)}}$$

$$\begin{aligned}
m'_j &= \lambda m_j + (1 - \lambda)(m_i + m_j) - \epsilon(1 - \lambda)(m_i + m_j) \\
m'_j &= \lambda m_j + (1 - \lambda)m_i + (1 - \lambda)m_j - \epsilon(1 - \lambda)(m_i + m_j) \\
m'_j &= m_j - \epsilon(1 - \lambda)(m_i + m_j) + (1 - \lambda)m_i + \underbrace{(1 - \lambda)(m_i + m_j) - (1 - \lambda)(m_i + m_j)}_{\text{sumando un cero adecuado}} \\
m'_j &= m_j + (1 - \epsilon)(1 - \lambda)(m_i + m_j) + (1 - \lambda)m_i - (1 - \lambda)m_i - (1 - \lambda)m_j \\
m'_j &= m_j + (1 - \epsilon)(1 - \lambda)(m_i + m_j) - (1 - \lambda)m_j \\
m'_j &= m_j + (1 - \lambda)(m_i + m_j) - \epsilon(1 - \lambda)(m_i + m_j) - (1 - \lambda)m_j \\
m'_j &= m_j + (1 - \lambda)m_i + (1 - \lambda)m_j - \epsilon(1 - \lambda)(m_i + m_j) - (1 - \lambda)m_j \\
m'_j &= m_j + (1 - \lambda)m_i + \epsilon(1 - \lambda)(m_i + m_j)
\end{aligned}$$

$$m'_j = m_j + \underbrace{(1 - \lambda)[m_i - \epsilon(m_i + m_j)]}_{\text{Fracción de dinero intercambiada}} \tag{A.9}$$

$$m'_j = m_j + \Delta m \tag{A.10}$$

$$\Delta m = (1 - \lambda)[m_i - \epsilon(m_i + m_j)]$$

Se encuentra que hay una fracción Δm intercambiada por los agentes. Cuando en la simulación se conoce el valor del número aleatorio (ϵ) es posible saber quien será el perdedor y el ganador.

B. SIMULACIONES EN C++

Para la realización de las simulaciones a continuación, es necesario utilizar las librerías (código 1) y el archivo `Random.h`, con el que se eligen los agentes y la fracción aleatoria (ϵ).

```
1 #include <iostream>
2 #include <ctime>
3 #include <stdlib.h>
4 #include <stdio.h>
5 #include <cmath>
6 #include "Random.h"
```

Código 1: Librerías

Cabe mencionar que para los códigos que se presentan a continuación se ha omitido la estructura general usada en el lenguaje de programación c++. Por lo tanto, definir las variables y la función principal queda a cargo del lector.

```
1 for(int k=0;k<simulacion;k++){
2     for(int i=0;i<N;i++){ //repartir el dinero en partes iguales
3         vector[i]=D/N;}
4     for(int t=0;t<tiempo;t++){ //definir el numero de intercambios
5         fa=ran2.r(); //fraccion aleatoria
6         agenteA=int(ran2.r()*N);
7         agenteB=int(ran2.r()*N);
8         intercambio=fa*(vector[agenteA]+vector[agenteB])/2;
9         if(agenteA!=agenteB && vector[agenteB]>=intercambio){
10             vector[agenteA]=vector[agenteA]+intercambio;
11             vector[agenteB]=vector[agenteB]-intercambio;}}
12     for(int i=0;i<N;i++){
13         for(int n=0;n<cajas;n++){
14             if(vector[i]>=n*bin && vector[i]<(n+1)*bin){
15                 Histograma[n]=Histograma[n]+1;}}
16     } //fin repeticiones
17     //Histograma
18     for(int t=0;t<cajas;t++){
19         Histograma[t]/=simulacion;
20         cout <<t*bin<<" "<<Histograma[t]<<endl;}
```

Código 2: Distribución de probabilidad con ajuste a la función de Boltzmann-Gibbs

```

1  for(int k=repeat-1;k>=0;--k){ //repeticiones
2      for(int i=N-1;i>=0;--i){m[i]=M/N;} //repartir el dinero
3      for(int t=0;t<T;++t){ //definir el numero de intercambios
4          fa=ran2.r(); //fraccion aleatoria
5          a=int(ran2.r()*N);b=int(ran2.r()*N); //escoger dos agentes
6          dM=1; //dM=fa*(m[a]+m[b])/2;
7          if(m[b]>=dM){
8              m[a]+=dM; m[b]-=dM;}
9          for(int i=0;i<cajas;++i){Nb[i]=0;}
10         //histograma
11         for(int i=0;i<N;++i){
12             for(int n=0;n<cajas;++n){
13                 if(m[i]>=n*bin && m[i]<(n+1)*bin){
14                     Nb[n]+=1;}}
15         //entropia
16         for(int i=0;i<cajas;++i){
17             if(Nb[i]!=0){
18                 s[t]+=Nb[i]*log(Nb[i]/N)/N;}}
19     }
20     for(int t=0;t<T;++t){
21         s[t]/=repeat;
22         if(Nb[t]!=0){
23             cout<<t<<" " <<-s[t]<<endl;}}

```

Código 3: Entropía

```

1  for(int k=0;k<simulacion;k++){
2      for(int i=0;i<N;i++){ //repartir el dinero en partes iguales
3          vector[i]=M/N;}
4      for(int t=0;t<tiempo;t++){ //definir el numero de intercambios
5          fa=ran2.r(); //fraccion aleatoria
6          agenteA=int(ran2.r()*N); agenteB=int(ran2.r()*N);
7          intercambio=(1-lambda)*(fa*(vector[agenteB])-(1-fa)*(vector[
8          agenteA]));
9          if(agenteA!=agenteB && vector[agenteB]>=intercambio){
10             vector[agenteA]=vector[agenteA]+intercambio;
11             vector[agenteB]=vector[agenteB]-intercambio;}}
12     for(int i=0;i<N;i++){
13         for(int n=0;n<cajas;n++){
14             if(vector[i]>=n*bin && vector[i]<(n+1)*bin)
15                 Histograma[n]=Histograma[n]+1;}

```

```

15 }
16 for(int t=0;t<cajas;t++){
17     Histograma[t]/=simulacion;
18     cout<<t*bin<<" " <<Histograma[t]/N<<endl; }

```

Código 4: Distribución de probabilidad con ajuste a la función Gamma

```

1 //Todos con dinero promedio y volviendo cero
2 for(int i=N-1;i>=0;--i){m[i]=MA/N;Deuda[i]=0;Captacion[i]=0;}
   entidad=MA*xi;
3   for(int t=0;t<T;++t){
4       Sum[t]+=entidad;
5       for(int i=N-1;i>=0;--i){Captacion[i]=phi*xi*m[i]; //captan
6           if(entidad>Captacion[i]&&Deuda[i]<=0.000000001){
7               entidad-=Captacion[i]; m[i]+=Captacion[i];} //alpha
8           //eleccion de agentes y epsilon
9       a=int(ran2.r()*N);b=int(ran2.r()*N);epsilon=ran2.r();
10      deltaM=epsilon*(m[a]+m[b]); //deltaM
11      if(m[b]>=deltaM && a!=b){
12          m[a]+=deltaM;m[b]-=deltaM;} //intercambio clasico
13      if(m[b]<deltaM&&a!=b&&m[b]>0&&
14          entidad>deltaM-m[b]&&Deuda[b]<=0.000000001){
15          entidad-=(deltaM-m[b]);Deuda[b]+=(deltaM-m[b]);
16          m[a]+=deltaM; m[b]=0;} //intercambio nuevo
17      //procesos financieros
18      for(int i=N-1;i>=0;--i){
19          Deuda[i]*=(1+alfa);
20          if(beta*m[i]<Deuda[i]&&m[i]>0&&Deuda[i]>0){
21              Deuda[i]-=m[i];entidad+=m[i];m[i]=0;} //cobro
22          if(beta*m[i]==Deuda[i]&&m[i]>0&&Deuda[i]>0){
23              Deuda[i]=0;entidad+=m[i];m[i]=0;} //cobro
24          if(beta*m[i]>Deuda[i]&&m[i]>0&&Deuda[i]>0){
25              m[i]-=Deuda[i];entidad+=Deuda[i];Deuda[i]=0;} //cobro
26      }
27      cout<<i+1<<" " <<Sum[i]<<endl; }
28 } //fin intercambios

```

Código 5: Dinero de la entidad con ajuste a la función Logística

RESUMEN ANALÍTICO ESPECIALIZADO

A.TIPO DE DOCUMENTO: OPCIÓN DE GRADO	Trabajo de grado.
B.ACCESO AL DOCUMENTO	Universidad de los Llanos, Biblioteca.
1.TÍTULO DEL DOCUMENTO	EL IMPACTO DE UNA ENTIDAD FINANCIERA EN LA REDUCCIÓN DE LA DESIGUALDAD A PARTIR DE MODELOS BASADOS EN AGENTES
2.AUTORES	Alvarado Martínez Jose Luis. Angarita Osorio Wilder Arleht.
3.LUGAR Y AÑO DE PUBLICACIÓN	Villavicencio, 2019.
4.UNIDAD PATROCINANTE	Universidad de los Llanos.
5.PALABRAS CLAVE	Econofísica, modelos basados en agentes, distribución de dinero, entidad financiera.
6.DESCRIPCIÓN	<p>La econofísica es un nuevo campo de conocimiento que se encarga de aplicar modelos y herramientas de la física para analizar fenómenos económicos y financieros. Entre los desarrollos empíricos y teóricos en esta disciplina, se destaca el uso de modelos basados en agentes para estudiar distribuciones empíricas de riqueza, lo que se conoce con el nombre de modelos cinéticos de distribución.</p> <p>Estos modelos describen sistemas económicos por medio de una analogía con un gas ideal, donde los agentes intercambian dinero de forma semejante al intercambio de energía entre las partículas. El propósito de esta investigación es describir, por medio de simulaciones, el comportamiento de la distribución de dinero entre los agentes que ahorran una fracción ξ de su dinero en un banco.</p>

	<p>A fin de comparar los resultados, se usan los modelos basados en agentes para estudiar la variación en los índices de desigualdad, al incluir en el sistema una entidad financiera que maneja diferentes tasas de colocación α y de captación φ.</p>
7.FUENTES	<p>DRĂGULESCU, Adrian y Yakovenko, Victor M. «Statistical mechanics of money». En: <i>The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems</i> 17.4 (2000), págs. 723-729.</p> <p>CHAKRABARTI, Anindya S y Chakrabarti, Bikas K. «Statistical theories of income and wealth distribution». En: <i>Economics: The Open-Access, Open-Assessment E-Journal</i> 4.2010-4 (2010), págs. 1-31.</p>
8.CONTENIDOS	<p>En la primera sección de este trabajo se presentan los modelos basados en agentes, en especial los modelos cinéticos de distribución de dinero, también se muestra el lenguaje de programación utilizado para realizar las simulaciones y las formas de medir la desigualdad. En la sección 2, se describe la metodología de investigación y los materiales que se emplearon para la recolección de información. En la sección 3, se muestran los resultados y hace el análisis comenzando con las simulaciones de las distribuciones de Boltzmann-Gibbs y Gamma para luego realizar una comparación de las distribuciones encontradas con datos empíricos y finalmente se propone la simulación de un sistema económico añadiendo una entidad financiera.</p>
9.METODOLOGÍA	<p>El presente trabajo de investigación sigue una metodología cuantitativa con enfoque exploratorio y correlacional, fundamentado en los MBA aplicando teoría cinética de gases. Este enfoque cuantitativo, está orientado al análisis de un sistema económico cerrado con unas características específicas, como lo son: el ahorro de dinero en los agentes y la presencia de una entidad financiera.</p>

	<p>Dado que el enfoque cuantitativo es de tipo exploratorio en este proyecto la metodología analiza la riqueza, profundidad y calidad de la información, y no la cantidad y estandarización de la misma; se busca describir el modo en que cada individuo interactúa con los demás y con la entidad, de esta manera, exponer características endógenas que sirvan para entender un sistema económico cuando se realizan ahorros y préstamos.</p>
<p>10.CONCLUSIONES</p>	<p>Cuando se incluye una entidad financiera ésta acumula el dinero del sistema ($M_E \rightarrow M$) en un tiempo denominado tiempo de saturación t_s y la evolución temporal del dinero se ajusta a una función logística.</p> <p>Entre más ahorren los agentes el tiempo de saturación t_s aumenta cuadráticamente de acuerdo a $t_s(\xi) = a\xi^2 + b\xi + c$.</p> <p>Cuando las tasas de interés son muy cercanas ($\varphi \rightarrow \alpha$), el tiempo de saturación se incrementa exponencialmente ($t_s(\varphi) = D_0 e^{D_1 \varphi}$).</p> <p>Si el interés de colocación α es menor al de captación φ en dos ordenes de magnitud la entidad tiende a la bancarrota, para el caso contrario solo tiende a acumular el dinero del sistema $M_E \rightarrow M$</p> <p>La evolución temporal del dinero en la entidad tiene la misma forma funcional del modelo LRM usado para evaluar la probabilidad de bancarrota, el cual se emplea con mayor frecuencia debido a que realiza las mejores predicciones en este campo</p>