EXISTENCIA DE SUBÁLGEBRAS DE CARTAN EN ÁLGEBRAS DE LIE SOLUBLES

ANDRÉS FELIPE LIZARAZO QUINTERO
CÓDIGO: 141002932

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA Y BELLAS ARTES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
VILLAVICENCIO
2019

EXISTENCIA DE SUBÁLGEBRAS DE CARTAN EN ÁLGEBRAS DE LIE SOLUBLES

ANDRÉS FELIPE LIZARAZO QUINTERO
CÓDIGO: 14100932

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física.

Director
Arturo Alexander Castro Galvis

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA Y BELLAS ARTES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
VILLAVICENCIO
2019

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN

AUTORIZACIÓN

Yo **ANDRÉS FELIPE LIZARAZO QUINTERO** mayor de edad, vecino de Villavicencio, identificado con la Cédula de Ciudadania No. 1.121.913.786 de Villavicencio, actuando en nombre propio en mi calidad de autor propio del trabajo de tesis, monografía o trabajo de grado denominado **EXISTENCIA DE SUBÁLGEBRAS DE CARTAN EN ÁLGEBRAS DE LIE SOLUBLES**, hago entrega del ejemplar y de sus anexos de ser el caso, en formato digital o electrónico (CD-ROM) y autorizo a la **UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS**, para que en los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia, con la finalidad de que se utilice y use en todas sus formas, realice la reproducción, comunicación pública, edición y distribución, en formato impreso y digital, o formato conocido o por conocer de manera total y parcial de mi trabajo de grado o tesis.

EL AUTOR – ESTUDIANTE, Como autor, manifiesto que el trabajo de grado o tesis objeto de la presente autorización, es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros; por tanto, la obra es de mi exclusiva autoría y poseo la titularidad sobre la misma; en caso de presentarse cualquier reclamación o acción por parte de un tercero en cuanto a los derechos de autor sobre la obra en cuestión, como autor, asumiré toda la responsabilidad, y saldré en defensa de los derechos aquí autorizados, para todos los efectos la Universidad actúa como un tercero de buena fe.

Para constancia, se firma el presente documento en dos (2) ejemplares del mismo valor y tenor en Villavicencio - Meta: a los veintiocho (28) días del mes de febrero de dos mil diecinueve (2019).

ANDRÉS FELIPE LIZARAZO QUINTERO
C.C. No. 1.121.913.786 de Villavicencio.

AUTORIDADES ACADÉMICAS

PABLO EMILIO CRUZ CASALLAS
Rector (E)

DORIS CONSUELO PULIDO DE GONZÁLEZ
Vicerrectora Académica

DEIVER GIOVANNY QUINTERO REYES
Secretario General

FREDY LEONARDO DUBEIBE MARÍN
Decano (E) de la Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación

OMAIRA ELIZABETH GONZALEZ
Directora de la Escuela de Pedagogía y Bellas Artes

NASLY YANIRA MARTÍNEZ
Directora del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física

Nota de acceptación

MARÍA TERESA CASTELLANOS
Directora Centro de Investigaciones FCHyE

NASLY YANIRA MARTÍNEZ
Directora del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física

FRANCISCO JAVIER GUTIÉRREZ
Evaluador

BEATRIZ ROJAS GARCÍA
Evaluadora

ARTURO ALEXANDER CASTRO
Director

Villavicencio, 28 de febrero de 2019

AGRADECIMIENTOS

• En primera instancia agradezco a Dios como gestor de esta gran bendicion.

• A mi padre Alfonso Lizarazo y a mi hermosa madre Amanda Quintero, les agradezco por su apoyo, confianza, amor y aporte en cada etapa de mi formación personal y académica, porque me han enseñado la importancia de la responsabilidad y el respeto, cualidades que me han permitido que me llevan hoy a cumplir este logro eficientemente. Ellos son mi mayor ejemplo, mi guía y mi más grande motivación en mi día a día, se los debo todo, Gracias.

• A mis hermanos Jr Alfonso, Jorge Mario y a mi hermana Dianeth Xiomara porque me apoyaron y animaron en momentos dificiles. También, a Yadira Elena por ser una tía explendida que sobresale con sus consejos positivos.

• Agradezco a mi Abuela Blanca Olivia porque su amor es incondicional y en la Memoria de Blanca Maria Mora De Lizarazo (Q.E.P.D) por enseñar a mi padre que lo más valioso es el estudio.

• A Juan León por ser un buen compañero de equipo durante el décimo semestre y a Jairo Rivera por demostrarme que un compañero puede llegar a ser un gran amigo, espero compartir más gratos momentos con ustedes. Así mismo, a las docentes Nasly Yanira Martínez, María Cristina Acosta, Beatriz Rojas García y él Profesor Francisco Gutiérrez Lizarazo porque me guiaron durante este proceso a fin de ser alguien mejor.

• De forma especial, quiero expresar mis sentimientos de respeto y admiración al Mg. Arturo Alexander Castro, a quien agradezco por invitarme al desarrollo de este proyecto y darme una oportunidad de trabajar con un excelente profesional. Gracias por influir en mi proceso de formación durante bastante tiempo en la Universidad y por enseñarme a querer la Matemática.

• Finalmente a Dahiana Lizeth por ofrecer bondad, cariño, tiempo y nobleza durante este proceso.

A todos ustedes, este trabajó es suyo como mío y por ello, les dedicó este título.

CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

En el año 1873, el matemático noruego Sophus Marius Lie (19 de diciembre 1842 – 18 de febrero de 1899) deseaba conseguir una teoría para solucionar ecuaciones diferenciales semejantes a la planteada por Galois para resolver ecuaciones algebraicas. Lie utilizó las transformaciones de contacto para asociar a cada ecuación diferencial en derivadas parciales una familia finita de transformaciones, que resultó ser cerrada, por lo que la llamó grupo infinitesimal. Estás familias eran lo que hoy en día se conocen con el nombre de álgebras de Lie de dimensión finita. En realidad, el concepto de grupo de Lie no surgiría hasta algún tiempo después, "cuando observó que las simetrías de una ecuación diferencial daban lugar a grupos con parámetros (que hoy consideraríamos un grupo de Lie)"[1].

Lie contribuyó notablemente al desarrollo de la geometría diferencial, geometría algebraica y teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Actualmente, la Teoría de Lie no sólo se aplica en matemáticas, sino que cada vez es mayor su utilización en física teórica, en la moderna teoría de supercuerdas, y en óptica, constituyendo una importante aproximación a la unificación de la mecánica cuántica y la relatividad general. Los aportes fundamentales que realizó Lie fueron el asociar a cada grupo de transformaciones continuas un álgebra de Lie y el establecer una aplicación del álgebra de Lie al grupo de Lie a través de los grupos a un parámetro.

La correspondencia entre grupos de Lie y álgebras de Lie creo un importante vínculo entre el álgebra y la geometría, que permite tratar algunos problemas desde distintas perspectivas. Un aspecto importante en el estudio de esta teoría es la clasificación de las álgebras de Lie cuyo problema se abordó a principios de siglo XIX por Killing y Cartan.

Por otro lado, Élie Joseph Cartan nació en Dolomieu, el 9 de abril de 1869 y falleció a sus 82 años (6 de mayo de 1951), fue matemático francés y llevó a cabo trabajos fundamentales en la teoría de grupos de Lie, en la tesis doctoral presenta su gran trabajo llamado Subálgebras de Cartan.

"Un álgebra de Lie es una estructura algebraica definida sobre un espacio vectorial, además, el término "álgebra de Lie" (referido por Sophus), fue designado por Herman Weyl en 1934; previamente, en sus trabajos de 1925, Weyl había utilizado la expresión "grupo infinitesimal"."[2]

Hablar de dichas álgebras es difícil, por ello, es conveniente hablar de las aplicación de los trabajos de Sophus, como: la teoría de grupos y álgebras de Lie las cuales son destacadas por ser una herramienta primordial en la solución de problemas de

[1] Fuentes, Luis y López, Víctor. Introducción a las álgebras de Líe, Pág. 5
[2] Durán, Antonio. Sección Historia Gaceta RSME, Universidad de Sevilla. Vol. 5.1 (2002). Pág. 128.

Geometría, Ecuaciones Diferenciales, y la conexión de los problemas físicos con la matemática abstracta teniendo aplicaciones en teorías modernas como la teoría de súper-cuerdas. Esto y que matemáticos como el francés Jean Dieudonné se refieran a la teoría de Lie como un gran eje gigante en los avances científicos, o que Albert Einstein las usará en sus cálculos para la Teoría General de la Relatividad hace pensar en lo importante de su estudio.

Un aspecto importante de la teoría, es que Cartan tuvo la oportunidad de conocer a Lie, y decidió continuar con el trabajo de Sophus, por tanto, Killing-Cartan establecieron el concepto de las subálgebras de Cartan las cuales sirven para clasificar las álgebras de Lie, pero dicha clasificación la hicieron sin pensar si existían o no existían las subálgebras de Cartan y luego de esa clasificación pensaron ¿existen esas subálgebras?; por ello, realizamos una revisión bibliográfica y se encontró, que en cientos de publicaciones, algunos autores han dado por hecho que las subálgebras de Cartan existen en las álgebras de Lie y de esa forma, continúan con su análisis de investigación, y por el contrario, en otras publicaciones otros autores dan por hecho que las subálgebras de Cartan no existen en las álgebras de Lie y continúan con su respectivo análisis de investigación, y por lo general en ninguno de los dos casos las demuestran, es decir; dan por hecho que existen o no existen y continúan con su trabajo.

En los cursos ofertados en el plan de estudios de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos, se estudia la estructura de un álgebra y el álgebra lineal, dejando de lado el estudio de otras álgebras como lo son las álgebras de Lie, la cuál es un tema novedoso e interesante para cualquier estudiante de la carrera.

De todo lo mencionado; es por ello que, en este trabajo estudiamos las extensiones de los argumentos clásicos para establecer la existencia de las subálgebras de Cartan en álgebras de Lie solubles de dimensión finita.

1. MARCO TEÓRICO

En este capítulo, presentamos los conceptos del álgebra lineal que permitirán comprender las álgebras de Lie.

1.1. TEORÍA DE MATRICES

A continuación, estudiamos las nociones básicas de la teoría de matrices.

Definición 1.1.1. *Sea m y n enteros positivos. Un arreglo rectangular de m filas y n columnas de números reales.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se llama matriz de orden (o tamaño) $m \times n$, sobre $\mathbb{R}$.

En forma abreviada se puede escribir la matriz A como $(a_{ij})_{m\times n}$, donde (a_{ij}) denota la entrada de A en la i-ésima fila y la j-ésima columna.

El conjunto de las matrices de orden $m\times n$ con entradas reales se denota con $M(m,n,\mathbb{R})$, en el caso de las **matrices cuadradas** (es decir con igual número de filas y columnas) como $M(n,\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.1.1. *Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ una matriz de orden 3.*

Ejemplo 1.1.2. *Sea $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ una matriz de orden 2×3.*

Definición 1.1.2. *Si $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$ son matrices del mismo orden, se define la suma de A y B, la cual se nota $A+B$, como la matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ de orden $m\times n$, donde:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ (1 \le i \le m, 1 \le j \le n).$$

Ejemplo 1.1.3. *Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, matrices de orden 2×3, entonces:*

$$A + B = C = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 3 \\ 7 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

Propiedades 1.1.1. *Si A, B y C son matrices de orden $m\times n$ entonces:*

1. $A+B=B+A$.

2. $A+(B+C)=(A+B)+C$.

3. *Existe una única matriz* 0 *de orden* $m\times n$, *llamada matriz nula, tal que,* $A+0=0+A=A$.

4. *Para toda matriz* A, *existe* $(-A)$, *llamada matriz inversa aditiva, tal que* $A+(-A)=0$.

Definición 1.1.3. *Si* α *es un escalar y* $A=(a_{ij})_{m\times n}$ *una matriz de orden* $m\times n$, *se define el múltiplo escalar* αA *como la matriz* $B=(b_{ij})_{m\times n}$ *de orden* $m\times n$, *donde:*

$$b_{ij}=\alpha a_{ij},\ (1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n).$$

Propiedades 1.1.2. *Dadas las matrices* A *y* B *de orden* $m\times n$ *y los escalares* 1, 0, α *y* β, *entonces se cumple que:*

1. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

2. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

3. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

4. $1A=A$.

5. $0A=0$.

Definición 1.1.4. *Dadas dos matrices* $A=(a_{ik})_{m\times n}$ *y* $B=(b_{kj})_{n\times p}$. *Se define el producto de* A *por* B *como la matriz* $C=(c_{ij})_{m\times p}$, *cuyos elementos vienen dados por:*

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

Ejemplo 1.1.4. *Sean* $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}1&4&1&3\\3&1&0&7\\5&2&2&9\end{pmatrix}$ *matrices de orden* 2×3 *y de orden* 3×4, *respectivamente, entonces:* $AB=\begin{pmatrix}22&12&7&38\\37&14&10&73\end{pmatrix}$ es una matriz de orden 2×4.

Ejemplo 1.1.5. *Sean* $A=\begin{pmatrix}6&5\\2&3\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}6&2\\4&1\end{pmatrix}$ *matrices de orden* 2, *entonces* AB *es:*

$$AB=\begin{pmatrix}56&17\\24&7\end{pmatrix}.$$

Propiedades 1.1.3. *Si* A, B *y* C *son matrices de ordenes apropiados, entonces se cumple que:*

1. $A(BC) = (AB)C$.

2. $A(B+C) = AB+AC$.

3. $(A+B)C = AC+BC$.

Definición 1.1.5. *Sea una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$, entonces, la transpuesta de A, que se escribe A^T de orden $n \times m$, se obtiene al intercambiar las filas de A por las columnas, o equivalentemente escribir las columnas de A por filas, es decir:*

$$\text{Si } A = (a_{ij})_{m\times n}, \text{ entonces } A^T = (a_{ji})_{n\times m}.$$

Ejemplo 1.1.6. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, entonces la matriz transpuesta de A está dada por: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Propiedades 1.1.4. *Sean A y B matrices de orden $m \times n$ y α un escalar, entonces se cumple que:*

1. $(A^T)^T = A$.

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

3. $(AB)^T = B^T A^T$.

4. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Definición 1.1.6. *Dada una matriz A de orden n, la traza de A, la cual se nota como $tr(A)$, se define como la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir:*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Ejemplo 1.1.7. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 1 & 8 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *una matriz de orden 4, entonces, $tr(A) =$* $3+9+1+6 = 19$.

Propiedades 1.1.5. *Sean A, B y C matrices de orden n y α un escalar, se cumple que:*

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

2. $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$.

3. $tr(A)^T = tr(A)$.

4. Si A es una matriz de orden $n \times m$ y B una matriz de orden $m \times n$ entonces $tr(AB) = tr(BA)$.

Definición 1.1.7. *Se define la **matriz diagonal** como la matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ tal que todos los elementos fuera de la diagonal son nulos, esto es $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definición 1.1.8. *Se define la **matriz triangular superior** como la matriz $B = (b_{ij})_{n\times n}$ tal que todos los elementos de abajo de la diagonal son cero, esto es $b_{ij} = 0$, si $i > j$,*

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definición 1.1.9. *Se define la **matriz triangular inferior** como la matriz $B = (b_{ij})_{n\times n}$ tal que todos los elementos de arriba de la diagonal son cero, esto es $b_{ij} = 0$, si $i < j$*

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definición 1.1.10. *Se define la **matriz identidad** como la matriz $I_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$ de orden n con δ_{ij}[3] $= \begin{cases} 1 & si \;\; i = j \\ 0 & si \;\; i \neq j \end{cases}$, es decir,*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.1.11. *Una matriz real A es **simétrica** si $A^T = A$. Equivalentemente, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ es simétrica si cada $a_{ij} = a_{ji}$.*

Ejemplo 1.1.8. *La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ de orden 3, es una matriz simétrica, ya que, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix} = A$.*

[3] *Se llama el símbolo de Kronecker o delta de Kronecker.*

Definición 1.1.12. *Una matriz real A es* ***antisimétrica*** *si $A^T = -A$. Equivalentemente, una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ es antisimétrica si cada $a_{ij} = -a_{ji}$. Claramente, los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica deben ser nulos, ya que $a_{ii} = -a_{ii}$ implica $a_{ii} = 0$.*

Ejemplo 1.1.9. *La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ de orden 3, es una matriz antisimétrica, debido a que,*

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -A.$$

Definición 1.1.13. *Sea A una matriz cuyos elementos son números complejos; la matriz obtenida a partir de A sustituyendo cada elemento por su respectivo conjugado se llama* ***matriz conjugada*** *de A y se representa por $\bar{A}$.*

Ejemplo 1.1.10. *Dada $A = \begin{pmatrix} 3+i & 5+i \\ 4-i & 8 \end{pmatrix}$,* es una matriz de orden 2, cuya matriz conjugada es: $\bar{A} = \begin{pmatrix} 3-i & 5-i \\ 4+i & 8 \end{pmatrix}$.

Definición 1.1.14. *Sea A una matriz de orden n, se dice que es una* ***matriz nilpotente*** *si existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.*

Ejemplo 1.1.11. *La matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ es nilpotente de orden 2, dado que:*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36-36 & -36+36 \\ 24-24 & -36+36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. ESPACIOS VECTORIALES

Para comprender qué es un espacio vectorial es necesario tener claro qué es un campo. A continuación, presentamos la definición de campo.

Definición 1.2.1. *Un campo $\mathbb{F}$, es un conjunto no vacio o una estructura algebraica en el que se definen dos operaciones, llamadas suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$. Que satisface los siguientes axiomas:*

1. $a+b \in \mathbb{F}$ $, \forall\, a,b \in \mathbb{F}$.
2. $a+b = b+a$, $\forall\, a,b \in \mathbb{F}$.
3. $a+(b+c) = (a+b)+c$, $\forall\, a,b$ y $c \in \mathbb{F}$.

4. $\exists\, 0 \in \mathbb{F},\, 0+a=a+0=a,\ \forall\, a \in \mathbb{F}.$

5. $\forall\, a \in \mathbb{F},\, \exists\, (-a) \in \mathbb{F},\ a+(-a)=(-a)+a=0.$

6. $a \cdot b \in \mathbb{F},\ \forall\, a,b \in \mathbb{F}.$

7. $a \cdot b = b \cdot a,\ \forall\, a,b \in \mathbb{F}.$

8. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,\ \forall\, a,b$ *y* $c \in \mathbb{F}.$

9. $\exists\, 1 \in \mathbb{F}, \forall\, a \in \mathbb{F},\ 1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$

10. $\forall\, a \neq 0 \in \mathbb{F}, \exists\, a^{-1} \in \mathbb{F},\ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$

11. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c,\ \forall\, a,b$ *y* $c \in \mathbb{F}.$

Ejemplo 1.2.1. *El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, números reales $\mathbb{R}$ y el de los números complejos $\mathbb{C}$, son campos con las operaciones suma y multiplicación usuales.*

Definición 1.2.2. *Un conjunto V se denomina espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, si se tiene dos operaciones llamadas suma $(+)$ y multiplicación por escalar $(\cdot)$. Que satisfacen los siguientes diez axiomas:*

1. $u+v \in V,\ \forall\, u,v \in V.$

2. $u+v = v+u,\ \forall\, u,v \in V.$

3. $u+(v+w) = (u+v)+w,\ \forall\, u,v$ *y* $w \in V.$

4. $\exists\, 0 \in V, \forall\, u \in V,\ 0+u=u+0=u \quad (0$ *es el módulo de la adición*$).$

5. $\forall\, u \in V, \exists\, (-u) \in V, u+(-u)=(-u)+u=0.$

6. $k \cdot u \in V,\ \forall\, u \in V$ *y* $k \in \mathbb{F}.$

7. $k \cdot (u+v) = k \cdot u + k \cdot v,\ \forall\, u,v \in V$ *y* $k \in \mathbb{F}.$

8. $(k+j) \cdot u = k \cdot u + j \cdot u,\ \forall\, u \in V$ *y* $k,j \in \mathbb{F}.$

9. $(k \cdot j) \cdot u = k \cdot (j \cdot u), \forall\, u \in V$ *y* $k,j \in \mathbb{F}.$

10. $\forall\, u \in V, 1 \cdot u = u,$ *en donde* 1 *es el elemento unidad de* $\mathbb{F}.$

Los elementos de V se llaman vectores y los elementos de $\mathbb{F}$ se llaman escalares.

Ejemplo 1.2.2. *El conjunto $M(n,\mathbb{F})$ de matrices de orden n sobre $\mathbb{F}$ con la suma (Definición 1.1.2) y multiplicación por un escalar (Definición 1.1.3) son un espacio vectorial.*

1.3. SUBESPACIOS VECTORIALES

En esta sección, presentamos la definición y algunos ejemplos de subespacio vectorial que serán utiles para la investigación.

Definición 1.3.1. *Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V. Si W es un espacio vectorial con respecto a las operaciones de V, entonces W es un subespacio de V.*

Teorema 1.3.1. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y $W \subseteq V$ no vacío, W es subespacio vectorial de V si:*

1. $\forall\, u,w \in W,\ u+v \in W$.
2. $\forall\, u \in W$ y $\forall\, k \in \mathbb{F},\ ku \in W$.

Ejemplo 1.3.1. *Considere el conjunto $W = \{X \in M(n,\mathbb{F}) \mid X + X^T = 0\}$. Verificaremos que W es un subespacio vectorial de $M(n,\mathbb{F})$.*

Solución. *Sean $X,Y \in W$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, donde $\mathbb{F}$ es un campo, entonces:*

1. $W \neq \emptyset$, *ya que* $0 \in W$, *debido a que* $0 + 0^T = 0$.
2. *Como* $X,Y \in W$, *entonces* $X + X^T = 0$ *y* $Y + Y^T = 0$. *Por lo tanto,*
$$\begin{aligned}(X+Y)+(X+Y)^T &= (X+Y)+(X^T+Y^T)\\ &= (X+X^T)+(Y+Y^T) = 0 \in W.\end{aligned}$$
3. *Como* $\alpha \in \mathbb{F}$ *y* $X \in W$, *entonces* $X + X^T = 0$. *Por lo tanto,*
$$\begin{aligned}(\alpha X)+(\alpha X)^T &= \alpha X + \alpha X^T = \alpha(X+X^T)\\ &= \alpha 0 = 0 \in W.\end{aligned}$$

De $1.\ 2.$ *y* $3.$ W *es un subespacio vectorial.*

Notaremos como $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ como el conjunto de matrices de traza nula de orden n en un campo $\mathbb{F}$.

Ejemplo 1.3.2. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}) = \{X \in M(n,\mathbb{F}) \mid tr(X) = 0\}$ *es un subespacio vectorial.*

Solución. *Sean $X,Y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, donde $\mathbb{F}$ es un campo, entonces:*

1. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}) \neq \emptyset$, *ya que* $0 \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ *debido a que* $tr(0) = 0$.

2. *Veamos que si* $X,Y\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ *entonces* $tr(X+Y)=0$, *en efecto:*

$$\begin{aligned} tr(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n}(X+Y)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}X_{ii}+Y_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n}X_{ii}+\sum_{i=1}^{n}Y_{ii}=tr(X)+tr(Y) \\ &= 0+0=0\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}). \end{aligned}$$

3. *Veamos que si* $\alpha\in\mathbb{F}$, $X\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ *entonces* $tr(\alpha X)=0$, *en efecto:*

$$\begin{aligned} tr(\alpha X) &= \sum_{i=1}^{n}\alpha X_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}X_i \\ &= \alpha tr(X)=\alpha 0=0\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}). \end{aligned}$$

De 1. 2. *y* 3. $\mathfrak{sl}(n,\,\mathbb{F})$ *es un subespacio vectorial.*

Definición 1.3.2. *Sean* $v_1,v_2,...,v_n$ *vectores en un espacio vectorial* V, *sobre un campo* $\mathbb{F}$.

1. *Un vector* $v\in V$, *es una combinación lineal de* $v_1,v_2,...,v_n$ *si existen* $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbb{F}$, *tales que* $v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n$.
2. *Diremos que* $v_1,v_2,...,v_n$ *generan a* V, *si cada vector de* V *es una combinación lineal de* $v_1,v_2,...,v_n$.
3. $v_1,v_2,...,v_n$ *son linealmente independientes si y sólo si la única forma que* $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n=0$, *es que* $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$. *En caso contrario diremos que son linealmente dependientes.*
4. *Diremos que el conjunto* $G=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ *es una base de* V *si los vectores de* G *son linealmente independientes y generan a* V. *Además, la dimensión de* V *es* n.

Ejemplo 1.3.3. *Sean* $v_1=(1,1,0),v_2=(0,1,1)$ *y* $v_3=(1,0,1)$ *vectores de* $\mathbb{R}^3,G=\{v_1,v_2,v_3\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^3$, *ya que:*

1. v_1,v_2,v_3 *son linealmente independientes, en efecto:* $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0$, *entonces se tiene que,*

$$\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(1,0,1)=(0,0,0),$$

es decir,

$$\begin{gathered}\alpha+\gamma=0,\\ \alpha+\beta=0,\\ \beta+\gamma=0,\end{gathered}$$

por tanto,

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

2. *Sea* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. *Si* $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (a,b,c)$ *entonces se tiene que*:

$$\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,1) = (a,b,c),$$

esto es,

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= a, \\ \alpha + \beta &= b, \\ \beta + \gamma &= c, \end{aligned}$$

Al solucionar el sistema de ecuaciones lineales, tenemos que:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a+b-c}{2}, \\ \beta &= \frac{-a+b+c}{2}, \\ \gamma &= \frac{a-b+c}{2}. \end{aligned}$$

Luego, cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ *puede generarse a partir de* v_1, v_2 *y* v_3.

De 1. *y* 2. G *es una base de* $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.3.3. *Una función o aplicación* $\varphi : V \to W$ *es una regla de asociación entre los elementos de* V *y los elementos de* W. *Los conjuntos* V *y* W *se llamaran* dominio *y* codominio *de* φ, *respectivamente, y al subconjunto de* W *formado por todas las imágenes de los elementos de* V *se llamaran* conjunto imagen *de* φ.

Definición 1.3.4. *Sean* V *y* W *espacios vectoriales cualesquiera sobre el campo* $\mathbb{F}$. *Una aplicación* $T : V \to W$ *es llamada una transformación lineal si* $\forall\ \alpha \in \mathbb{F}$ *y* $\forall\ u$, $v \in V$ *se verifica que:*

1. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.
2. $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

Observación 1.3.1. *Es importante aclarar que para los espacios vectoriales* V *y* W, *denotaremos de la misma forma la suma, el producto por escalar y el vector* 0, *así sean operaciones y vectores diferentes, respectivamente.*

Ejemplo 1.3.4. *Sea la función* $T : R^3 \to R^2$, *tal que* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ 2z-x \end{pmatrix}$, *entonces* T *es una transformación lineal, en efecto:*

Solución. *Para probar que T es una transformación lineal, debemos verificar que se cumple la Definición (1.3.4)*

1. *Sea $\beta \in \mathbb{F}$ y $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$. Veamos que $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, en efecto:*

$$T\left[\beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \beta x \\ \beta y \\ \beta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta x - 2\beta y \\ 2\beta z - \beta x \end{pmatrix}$$
$$= \beta \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2z - x \end{pmatrix} = \beta T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

2. *Sean $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \in \mathbb{R}^3$ entonces $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$,*

$$\begin{aligned} T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] &= T\begin{pmatrix} (x_1+x_2) \\ (y_1+y_2) \\ (z_1+z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+x_2) - 2(y_1+y_2) \\ 2(z_1+z_2) - (x_1+x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2) \\ (2z_1 - x_1) + (2z_2 - x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - 2y_1 \\ 2z_1 - x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - 2y_2 \\ 2z_2 - x_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De $1.$ y $2.$ T es una transformación lineal.

Definición 1.3.5. *Sean V y W espacios vectoriales y $T: V \to W$ una transformación lineal. Se define el* ***Kernel*** *o el* ***núcleo*** *de T como:*

$$Ker(T) := \{x \in V \mid T(x) = 0\},$$

y la imagen de T como:

$$Im(T) := \{y \in W \mid \exists\, x \in V,\ y = T(x)\}.$$

Definición 1.3.6. *Si una transformación lineal es una función inyectiva, decimos que es una transformación lineal inyectiva.*

Teorema 1.3.2. *Sean V y W espacios vectoriales y $T: V \to W$ una transformación lineal, entonces:*

1. *Si T es inyectiva entonces $Ker(T) = \{0\}$.*
2. *Si $Ker(T) = \{0\}$ entonces T es inyectiva.*

Demostración. Probaremos que T es inyectiva si y sólo si $Ker(T) = \{0\}$.

i) $1. \Rightarrow 2.$ Supongamos que T es inyectiva. Sea $x \in Ker(T)$. Entonces, $T(x) = 0$. Como T es una transformación lineal, $T(0) = 0$, por tanto, $T(x) = 0 = T(0)$. Luego, por ser T inyectiva, $x = 0$.

ii) $2. \Rightarrow 1.$ Recíprocamente, supongamos que $Ker(T) = \{0\}$ y sean $x, y \in V$ con $T(x) = T(y)$. Entonces, $T(x-y) = 0$. Luego, $x - y = 0 \to x = y$.

De i) y ii) comprobamos el bicondicional. □

1.4. ESPACIO COCIENTE

En esta sección estudiamos el cociente de un espacio vectorial V por un subespacio W. Este cociente se define como el conjunto cociente de V por una relación de equivalencia conveniente.

Definición 1.4.1. *Si V es un espacio vectorial y W es un subespacio cualquiera, definimos en V la siguiente relación binaria R:*

$$uRv \text{ si } u - v \in W, \ \forall\, u, v \in V.$$

Entonces R es una relación de equivalencia en V.

Observación 1.4.1. *Si $u - v \in W$ equivale a, $u - v = w$, $w \in W$, es decir, $u = v + w$, $w \in W$ y abusando del lenguaje matemático $u = v + W$.*

Definición 1.4.2. *La clase de equivalencia de un vector $v \in V$, se denota como:*

$$[v] \quad \text{ó} \quad v + W.$$

El conjunto cociente se denota V/W y se define como:

$$V/W = \{[v] = v + W \mid v \in V\}.$$

El cual se denomina espacio cociente de V por W.

La proyección canónica $\pi : V \to V/W$ que existe para cualquier relación de equivalencia, explícitamente se define como: $\pi(v) = [v] = v + W$.

Teorema 1.4.1. *Si V es un espacio vectorial y W un subespacio vectorial, se definen en V/W las siguientes operaciones:*

1. $[u]+[v]=[u+v],\ \forall\, u,v\in V.$
2. $\alpha[u]=[\alpha u],\ \forall\, \alpha\in\mathbb{F}$ *y* $\forall\, u\in V.$

Con respecto a estas operaciones, V/W es un espacio vectorial.

Demostración. Para demostrar que V/W es un espacio vectorial debemos verificar que se cumplen los axiomas de la Definición (1.2.2).

1. Sean $[u],[v]\in V/W$.
$$\begin{aligned}[u]+[v] &= (u+W)+(v+W)=(u+v)+(W+W)\\ &= (u+v)+W=[u+v]\in V/W.\end{aligned}$$
2. Sean $[u],[v]\in V/W$.
$$[u]+[v]=[u+v]=[v+u]=[v]+[u]\in V/W.$$
3. Sean $[u],[v],[w]\in V/W$.
$$\begin{aligned}[u]+([v]+[w]) &= [u]+[v+w]=[u+(v+w)]=[(u+v)+w]\\ &= [u+v]+[w]=([u]+[v])+[w]\in V/W.\end{aligned}$$
4. Supongamos que $[0]$ es el modulo de la suma en V/W, entonces:
$$[0]+[u]=[0+u]=[u]\in V/W.$$
5. Supongamos que $[-u]$ es el inverso aditivo de $[u]$, por lo tanto:
$$[u]+[-u]=[u-u]=[0]\in V/W.$$
6. $\forall\,[u]\in V,\ [w]\in W$ y $\alpha\in\mathbb{F}$, entonces:
$$\begin{aligned}\alpha[u] &= \alpha(u+W)=(\alpha u)+(\alpha W)\\ &= (\alpha u)+W=[\alpha u]\in V/W.\end{aligned}$$
7. $\forall\,[u]\in V$ y $\alpha,\ \beta\in\mathbb{F}$
$$\begin{aligned}\alpha(\beta[u]) &= \alpha[\beta u]=[\alpha(\beta u)]\\ &= [(\alpha\beta)u]=(\alpha\beta)[u]\in V/W.\end{aligned}$$

8. $\forall\ [u] \in V$ y $1 \in \mathbb{F}$

$$1[u] = [1u] = [u] \in V/W.$$

9. $\forall\ [u],\ [v] \in V$ y $\alpha \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned} \alpha([u]+[v]) &= \alpha[u+v] = [\alpha(u+v)] = [\alpha u + \alpha v] \\ &= [\alpha u] + [\alpha v] = \alpha[u] + \alpha[v] \in V/W. \end{aligned}$$

10. $\forall\ [u] \in V$ y $\alpha,\ \beta \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)[u] &= [(\alpha+\beta)u] = [\alpha u + \beta u] \\ &= [\alpha u] + [\beta u] = \alpha[u] + \beta[u] \in V/W. \end{aligned}$$

Por lo tanto, V/W es un espacio vectorial. □

Definición 1.4.3. *Un espacio vectorial se dice de dimensión finita (o finito-dimensión) si tiene al menos una base finita.*

Teorema 1.4.2. *Sea V un espacio de dimensión finita y W un subespacio, entonces:*

$$dim(V/W) = dim(V) - dim(W).$$

Demostración. Apartir de la hipótesis del presente Teorema, V es un espacio de dimensión finita, por tanto, satisface que tiene al menos una base finita, como se nombra en la Definición (1.4.3). Ahora, para demostrar que $dim(V/W) = dim(V) - dim(W)$ debemos verificar que cumple los items $3.$ y $4.$ de la Definición (1.3.2).

1. Para ver que son linealmente independientes, supongase que:

$$0 = \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i[v_i] = \left[\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i v_i\right],$$

entonces, $\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i v_i \in W$, en consecuencia, existen $\alpha_1, ...\alpha_m$ tales que:

$$\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i[v_i]$$

Por la independencia lineal de $v_1, ..., v_n$ se sigue que $\alpha_{m+1}, .., \alpha_n = 0$. Por lo tanto, $v_{m+1}, ..., v_n$ son una base de V/W.

2. Sean $m = dim(W), n = dim(V)$ y $v_1, ..., v_m$ una base de W. Se puede completar la base hasta obtener una de $V, v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n$.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad \forall\, v \in V.$$

De la teoria mencionada en esta sección y de que $v_1, ..., v_m \in W$, tenemos:

$$[v] = \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i [v_i], \quad [v_1] = ... = [v_m] = \{0\}.$$

Luego, se tiene que $[v_{m+1}], ..., [v_n]$ generan V/W

De 1. y 2. comprobamos que $dim(V/W) = dim(V) - dim(W)$. □

1.5. ÁLGEBRAS

En esta sección estudiamos la definición de álgebra y ejemplos que ayudaran en este estudio.

Definición 1.5.1. *Sea $\mathbb{F}$ un campo. Diremos que A es una $\mathbb{F}-$álgebra si y sólo si:*

1. *A es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y*
2. *Existe una operación bilineal $(\cdot,\cdot) : A \times A \longrightarrow A$, denotada por $(a,b) \mapsto a \cdot b$. Es decir, $\forall\, a, b$ y $c \in A$ y $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ se cumple que:*
   a) $(\alpha a + \beta b) \cdot c = \alpha(a \cdot c) + \beta(b \cdot c)$
   b) $c \cdot (\alpha a + \beta b) = \alpha(c \cdot a) + \beta(c \cdot b)$.

Definición 1.5.2. *Se dice que el álgebra A es abeliana (conmutativa) si $ab = ba$ para todo par de elementos de A.*

Definición 1.5.3. *Sea A un álgebra y $A_0 \subseteq A$, A_0 es una subálgebra, A_0 por sí es un álgebra.*

Definición 1.5.4. *Sea A una álgebra e $I \subseteq A$. Diremos que I es un ideal de A si y sólo si:*

1. *I es un subespacio vectorial de A,*
2. *$x \cdot y \in I$, $\forall\, x \in A$, $\forall\, y \in I$.*

Ejemplo 1.5.1. *Las matrices de orden 2 con entradas reales, es un álgebra sobre el campo de los reales $(\mathbb{R})$ con las operaciones usuales de: suma, multiplicación por escalar y multiplicación de matrices.*

2. METODOLOGÍA

El tipo de investigación que utilizamos es la pura, ya que GARZA[4] describe, se plantea enriquecer el conocimiento sin preocuparse por la aplicación directa de los resultados. La metodología usada es la teórica, la cual hace parte del saber específico y área de formación de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos.

Está linea de investigación, permitió analizar y reflexionar sobre la información obtenida durante el desarrollo de este proyecto de manera precisa y objetiva.

2.1. FASES

A continuación, presentaremos las fases del trabajo de grado.

2.1.1. FASE DE REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Realizamos una revisión bibliográfica exhaustiva a lo largo de este trabajo, con el fin de buscar los soportes teóricos relacionados con el álgebra lineal, álgebra moderna, álgebras de Lie y finalmente subálgebras de Cartan favoreciendo especialmente los referentes teóricos como: Pinzón Sofía, Castro Arturo, Gutiérrez Ismael y Navarro Manuel, Rodriguez Miguel, San Martin Luiz A.B., entre otros.

2.1.2. FASE DE DESARROLLO

Esta fase, la desarrollamos teniendo en cuenta principalmente algunos conceptos teorícos necesarios, como: ideal maximal propio, minimal y abeliana, álgebra abeliana, subálgebra máximal, axioma de elección, entre otros.

2.1.3. FASE DE ANÁLISIS

Realizamos procedimientos matemáticos-demostrativos para lograr establecer la existencia de las subálgebras de Cartan en las álgebras de Lie solubles de dimensión finita.

2.1.4. FASE DE SÍNTESIS

Organizamos el informe final mediante el compilador LaTeX y el editor *Texmaker* en su versión de prueba, generando como producto un archivo **.pdf** que contiene la información. También, se realizó un resumen para la sustentación final de dicho informe,

[4]GARZA MERCADO, Ario. Manual de técnicas de investigación para estudiantes de ciencias sociales y humanidades. 7ma ed. México D.F.: El colegio de México, Biblioteca Daniel Cosío Villegas, 2007. ISBN 968-12-1298-3. Pág. 15

ante la comunidad académica de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos u otros aquellos interesados en el tema.

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En está sección presentamos la teoría de las álgebras de Lie y estudiamos algunas definiciones faltantes para completar el trabajo y extenderemos los argumentos clásicos para mostrar la existencia de la subálgebra de Cartan excepto en el caso de álgebras de Lie no solubles sobre cuerpos finitos con un número pequeño de elementos.

3.1. ÁLGEBRAS DE LIE

Definición 3.1.1. *Una álgebra de Lie consiste en un espacio vectorial* $\mathfrak{g}$ *dotado de una operación producto llamada corchete o conmutador denotado por:*

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

la cual satisface las siguientes propiedades:

1. *Bilinealidad, es decir, que para todo* $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$ *y* $a,b \in \mathbb{F}$ *se cumple que*

$$[aX+bY,Z] = a[X,Z]+b[Y,Z], \tag{3.1}$$

$$[Z,aX+bY] = a[Z,X]+b[Z,Y]. \tag{3.2}$$

2. *Antisimetría, es decir, que para todo* $X,Y \in \mathfrak{g}$ *tenemos que*

$$[X,Y] = -[Y,X]. \tag{3.3}$$

3. *La identidad de Jacobi, esto es, para cualesquiera* $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$ *tenemos que*

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]] = 0, \tag{3.4}$$

que puede ser reescrita alternativamente de la siguiente forma

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]]. \tag{3.5}$$

Aplicando solamente la definición de álgebra de Lie obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1. *Si* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie, las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. *Para todo* $X,Y \in \mathfrak{g}$; $[X,Y] = -[Y,X]$.
2. *Para todo* $X \in \mathfrak{g}$; $[X,X] = 0$.

Demostración.

i) $1 \Rightarrow 2$. Sean $X,Y \in \mathfrak{g}$, por hipótesis tenemos que $[X+Y,X] = -[X,X+Y]$ que se puede reescribir de la forma $[X+Y,X]+[X,X+Y] = 0$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= [X+Y\,,X]+[X\,,X+Y] \\ 0 &= [X\,,X]+[Y\,,X]+[X\,,X]+[X\,,Y] \\ 0 &= [X\,,X]+[Y\,,X]+[X\,,X]-[Y\,,X] \\ 0 &= [X\,,X]+[X\,,X] \\ 0 &= 2[X\,,X]. \end{aligned}$$

Dada la arbitrariedad de X se tiene que para todo $X \in \mathfrak{g}\,[X\,,X] = 0$.

ii) $2 \Rightarrow 1$. Sean $X,Y \in \mathfrak{g}$ entonces por hipótesis $[X,X] = 0$ y $[Y,Y] = 0$, además:

$$\begin{aligned} 0 &= [X+Y\,,X+Y] \\ 0 &= [X\,,X+Y]+[Y\,,X+Y] \\ 0 &= [X\,,X]+[X\,,Y]+[Y\,,X]+[Y\,,Y] \\ 0 &= [X\,,Y]+[Y\,,X]. \end{aligned}$$

Por lo tanto para todo $X,Y \in \mathfrak{g}$; $[X\,,Y] = -[Y\,,X]$.

Por i) y ii) queda demostrado. $\square$

Notaremos como $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ el conjunto de todas las matrices de orden n en un campo $\mathbb{F}$.

Ejemplo 3.1.1. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ *es una álgebra de Lie donde el corchete esta dado por*

$$[X,Y] = XY - YX,\ \forall\, X,Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$$

Solución. *Sabemos que* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ *es un álgebra, para que* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ *sea una álgebra de Lie debe cumplir las condiciones dadas en la Definición (3.1.1), por lo tanto debemos demostrar que: el corchete en* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ *es bilineal, antisimétrico y que satisface la identidad de Jacobi.*

Sean $a,b \in \mathbb{F}$ *y* X, Y, Z *matrices de orden* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$.

- **Bilinealidad**

1. $[aX+bY,Z] = a[X,Z]+b[Y,Z]$.

$$\begin{aligned}
[aX+bY,Z] &= (aX+bY)Z-Z(aX+bY)\\
&= aXZ+bYZ-ZaX-ZbY\\
&= aXZ+bYZ-aZX-bZY\\
&= aXZ-aZX+bYZ-bZY\\
&= a(XZ-ZX)+b(YZ-ZY)\\
&= a[X,Z]+b[Y,Z].
\end{aligned}$$

2. $[Z,aX+bY] = a[Z,X]+b[Z,Y]$.

$$\begin{aligned}
[Z,aX+bY] &= Z(aX+bY)-(aX+bY)Z\\
&= ZaX+ZbY-aXZ-bYZ\\
&= aZX+bZY-aXZ-bYZ\\
&= aZX-aXZ+bZY-bYZ\\
&= a(ZX-XZ)+b(ZY-YZ)\\
&= a[Z,X]+b[Z,Y].
\end{aligned}$$

De 1. *y* 2. *obtenemos la bilinealidad del corchete en* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$.

- **Antisimetría del corchete.** *Para demostrar que es antisimétrica podemos usar cualquiera de las dos proposiciones (3.1.1), esto es:*
  Sea $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$, *entonces* $[X,X] = X.X - X.X = X^2 - X^2 = 0$. *Y así por la proposición (3.1.1) tenemos que* $[X,Y] = -[Y,X]$ *en* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$.

- **Identidad de Jacobi.**

  Para demostrar que cumple la propiedad de Jacobi, usaremos la Ecuación (3.5), sean $X,Y,Z \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$:

$$\begin{aligned}
[[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]] &= ([X,Y]Z-Z[X,Y])+(Y[X,Z]-[X,Z]Y)\\
&= (XY-YX)Z-Z(XY-YX)+Y(XZ-ZX)-(XZ-ZX)Y\\
&= XYZ-YXZ-ZXY+ZYX+YXZ-YZX-XZY+ZXY\\
&= XYZ+ZYX-YZX-XZY\\
&= (XYZ-XZY)+(ZYX-YZX)\\
&= X(YZ-ZY)-(YZ-ZY)X\\
&= X[Y,Z]-[Y,Z]X\\
&= [X,[Y,Z]].
\end{aligned}$$

Por lo anterior, obtenemos que $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ *es un álgebra de Lie.*

Definición 3.1.2. *Sea* $\mathfrak{g}$ *una álgebra de Lie, se dice* $\mathfrak{g}$ *es una álgebra de Lie abeliana si* $[X,Y]=0$, *para todo* $X,Y \in \mathfrak{g}$.

Ejemplo 3.1.2. *El campo $\mathbb{F}$ con el conmutador $[X,Y] = XY - YX$ es una álgebra de Lie abeliana, ya que, $\forall\, X,Y \in \mathbb{F}$ se cumple que $[X,Y] = XY - YX = 0$ porque $\mathbb{F}$ cumple la propiedad conmutativa con las operaciones usuales.*

Ejemplo 3.1.3. *Cualquier espacio vectorial $\mathfrak{g}$ con $[X,Y] = 0$, para todo $X,Y \in \mathfrak{g}$ se puede convertir en álgebra de Lie, esto está bien definido ya que, de la Definición (3.1.1) un álgebra de Lie debe ser espacio vectorial y dotar la operación corchete $[\cdot,\cdot]$.*

Ejemplo 3.1.4. *En particular, el conjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \right\}$, es un álgebra de Lie con el corchete $[X,Y] = XY - YX$. A está álgebra de Lie, se denomina álgebra de Heisenberg de orden 3.*

3.2. SUBÁLGEBRAS DE LIE

En está sección introducimos la definición de subálgebra de Lie y algunos ejemplos, que ayudaran al desarrollo de la temática.

Definición 3.2.1. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que es cerrado por el corchete, es decir, si $X,Y \in \mathfrak{h}$ entonces $[X,Y] \in \mathfrak{h}$.*

Ejemplo 3.2.1. *$\mathfrak{so}(n,\mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}), X + X^T = 0\}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$. Aqui X^T es la matriz transpuesta de X y $n \geq 2$.*

Solución. *Debemos comprobar que si $X,Y \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$ entonces $[X,Y] \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$. Para que $[X,Y] \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$ se debe cumplir que $[X,Y] + [X,Y]^T = 0$, veamos:*

$$
\begin{aligned}
[X,Y] + [X,Y]^T &= XY - YX + (XY - YX)^T \\
&= XY - YX + (XY)^T - (YX)^T \\
&= XY - YX + Y^T X^T - X^T Y^T \\
&= XY - YX + Y^T X^T - X^T Y^T + XY^T - XY^T \\
&= X(Y + Y^T) - YX + Y^T X^T - (X^T + X)Y^T \\
&= Y^T X^T - YX + YX^T - YX^T \\
&= (Y^T + Y)X^T - Y(X + X^T) = 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $[X,Y] \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$ y se demuestra que $\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$ es subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$.

Ejemplo 3.2.2. *$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}), tr(X) = 0\}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$.*

Solución. *Debemos comprobar que si* $X,Y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ *entonces* $[X\,,Y] \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$. *Para que* $[X\,,Y] \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ *se debe cumplir que* $tr([X\,,Y]) = 0$, *veamos:*

$$\begin{aligned} tr([X\,,Y]) &= tr(XY - YX) \\ &= tr(XY) - tr(YX) \\ &= tr(XY) - tr(XY) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[X,Y] \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ *y se demuestra que* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ *es subálgebra de* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$.

Ejemplo 3.2.3. $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{F}) \mid XJ + JX^T = 0\}$ *es una subálgebra de Lie* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ *donde* J *esta dada en bloques de tamaño* n.

$$J= \begin{pmatrix} 0 & -1_{n\times n} \\ 1_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}$$

aqui $1_{n\times n}$ *representa la matriz identidad de orden* n.

Solución. *Debemos comprobar que si* $X,Y \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$ *entonces* $[X,Y] \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$, *se debe cumplir que* $[X,Y]J + J[X,Y]^T = 0$. *Como* $X,Y \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$ *entonces* $XJ + JX^T = 0$ *y* $YJ + JY^T = 0$, *por lo tanto:*

$$\begin{aligned} [X,Y]J + J[X,Y]^T &= (XY - YX)J + J(XY - YX)^T \\ &= XYJ - YXJ + J(XY)^T - J(YX)^T \\ &= XYJ - YXJ + (JY^T)X^T - (JX^T)Y^T \\ &= XYJ - YXJ - Y(JX^T) + X(JY^T) \\ &= XYJ - YXJ + YXJ - XYJ \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[X,Y] \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$ *y se demuestra que* $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$ *es subálgebra de* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$.

Ejemplo 3.2.4. *El subespacio generado por las matrices triangulares superiores de orden* 3 *son una subálgebra de Lie de* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$, *las matrices son de la forma*

$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

3.3. GENERALIDADES ALGEBRAICAS

En está sección introducimos algunos conceptos provenientes de la teoría de grupos, que apoyaran el desarrollo de nuestra temática.

3.3.1. IDEALES, HOMOMORFISMOS Y AUTOMORFISMOS

Definición 3.3.1. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie e $I \subseteq \mathfrak{g}$. Diremos que I es un ideal de $\mathfrak{g}$ si y sólo si:*

1. *I es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$.*
2. *$[X,Y] \in I,\ \forall\, X \in \mathfrak{g},\ \forall\, Y \in I$.*

Si I es un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces escribiremos $I \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Obviamente {0} y $\mathfrak{g}$ son ideales de $\mathfrak{g}$. Estos ideales se denominan ideales triviales de $\mathfrak{g}$.

De la definición de subálgebra es claro que todo ideal es una subálgebra, sin embargo, no toda subálgebra es un ideal, por ejemplo:

Ejemplo 3.3.1. *El subespacio de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ generado por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una subálgebra por ser unidimensional. Sin embargo, no es un ideal pues*

$$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Finalmente destacamos que; un ideal es abeliano en un álgebra de Lie cuando sin importar el orden como se operen los elementos mediante la operacion corchete, conmuta.

Ejemplo 3.3.2. *El subespacio W de las matrices triangulares superiores con ceros en la diagonal de orden 3 es un ideal del espacio generado por las matrices descritas en el Ejemplo (3.2.4).*

Ejemplo 3.3.3. $I = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *es un ideal del álgebra de Heisenberg, ya que,*

$$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & w & q \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & w & q \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & w & q \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & aw & bp+aq \\ 0 & 0 & cp \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & ax & bx+cy \\ 0 & 0 & cw \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a(w-x) & b(p-x)+aq-cy \\ 0 & 0 & c(p-w) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in I.\end{aligned}$$

Definición 3.3.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. El centro de $\mathfrak{g}$ se denota como $Z(\mathfrak{g})$ y se define de la siguiente manera:*

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [Y,X] = 0, \; \forall \; Y \in \mathfrak{g}\}.$$

El centro son las álgebras de Lie que se anulan con un mismo elemento.

Ejemplo 3.3.4. *El centro de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F}) = 0$.*

Solución. *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in Z(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F}))$, *entonces*

$$\begin{aligned}
\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} bz-cy & 2(-bx+ay) \\ 2(cx-az) & cy-bz \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{c} bz-cy=0 \\ ay-bx=0 \\ cx-az=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a=b=c=0.$$

Como $a=b=c=0$, entonces $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}\right] = 0$. *Por tanto, se concluye que* $Z(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})) = 0$.

Ejemplo 3.3.5. *El centro de $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{F}) \neq 0$.*

Solución. *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Z(\mathfrak{gl}(2,\mathbb{F}))$, *entonces*

$$\begin{aligned}
\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} bz-cy & (a-d)y-b(t-x) \\ c(x-t)+z(d-a) & cy-bz \end{pmatrix}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\left.\begin{array}{c} bz-cy=0 \\ (a-d)y+b(x-t)=0 \\ c(x-t)+z(d-a)=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow b=c=0, d=a.$$

Por tanto, $Z(\mathfrak{gl}(2,\mathbb{F})) = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R}\right\}$.

Proposición 3.3.1. *El centro $Z(\mathfrak{g})$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Probaremos que el centro de un algebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.

1. Sean $X_1, X_2 \in Z(\mathfrak{g})$. Entonces, $\forall\, Y \in \mathfrak{g}$ se verifica que $[X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y] = 0$. Por lo tanto, $X_1, X_2 \in Z(\mathfrak{g})$.

2. Sean $\alpha \in \mathbb{F}$ y $X_1 \in Z(\mathfrak{g})$. Entonces, $\forall\, Y \in \mathfrak{g}$ tenemos que $[\alpha X_1, Y] = \alpha[X_1, Y] = \alpha 0 = 0$. Así $\alpha X_1 \in Z(\mathfrak{g})$.

   Entonces, por $1.$ y $2.$ se tiene que $Z(\mathfrak{g})$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$.

3. Sean $Y \in Z(\mathfrak{g}), Z \in \mathfrak{g}$. Entonces

$$\begin{aligned}
[[Y,Z],X] &= -[X,[Y,Z]],\ \forall\, X \in \mathfrak{g} \\
&= [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]]\ \forall\, X \in \mathfrak{g} \\
&= 0 + [Z,0]\ \forall\, X \in \mathfrak{g} \\
&= 0\ \forall\, X \in \mathfrak{g}
\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $[Y,Z] \in Z(\mathfrak{g}), \forall\, Y \in Z(\mathfrak{g}), Z \in \mathfrak{g}$.

Esto demuestra que $Z(\mathfrak{g})$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. □

Definición 3.3.3. *Un ideal $0 \neq I \subseteq \mathfrak{g}$ es minimal si para todo ideal J de $\mathfrak{g}$ tal que $0 \subseteq J \subseteq I$ tenemos que $J = 0$ ó $J = I$.*

Proposición 3.3.2. *Sean $I, J \subseteq \mathfrak{g}$ ideales minimales tales que $I \cap J \neq 0$, entonces $I = J$. En efecto, $I \cap J$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ tal que $I \cap J \subseteq I$ e $I \cap J \subseteq J$. Es decir, $\emptyset \neq J \subsetneq I$. De aquí se sigue que $I = J$.*

Definición 3.3.4. *Se dice que I es un ideal maximal propio de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, si J es un ideal de $\mathfrak{g}$ tal que I $\subseteq J \subseteq \mathfrak{g}$, entonces $J = \mathfrak{g}$.*

Definición 3.3.5. *El normalizador de una subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ esta dado por:*

$$N(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$$

Está es la mayor subálgebra (maximal) de $\mathfrak{g}$ que contiene a $\mathfrak{h}$ como un ideal.

En el caso de que una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no sea simple, es posible factorizar $\mathfrak{g}$ mediante un ideal propio no nulo I. Esto es, podemos construir una álgebra cociente $\mathfrak{g}/I$, y así obtener una álgebra de Lie más pequeña.

Definición 3.3.6. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y sea I un ideal de $\mathfrak{g}$. Definimos el conjunto*

$$\mathfrak{g}/I = \{x + I \mid x \in \mathfrak{g}\}.$$

Es conocido del álgebra lineal que $\mathfrak{g}/I$ es un espacio vectorial. Si además definimos sobre $\mathfrak{g}/I$ la operación $[X+I, Y+I] := [X,Y]+I$, para todo $X,Y \in \mathfrak{g}$ vemos que esta operación está bien definida.

En efecto, si $X+I = X'+I$ y $Y+I = Y'+I$, entonces $X' = X+U$ y $Y' = Y+V$, para algún $U,V \in I$. Por lo tanto $[X',Y'] = [X+U, Y+V] = [X,Y]+[X,V]+[U,Y]+[U,V]$, esto es, $[X',Y'] - [X,Y] = [X,V]+[U,Y]+[U,V]$. Entonces ,$[X',Y']+I = [X,Y]+I$, ya que $[X,V],[U,Y],[U,V] \in I$ porque I es un ideal de $\mathfrak{g}$. Por lo tanto ,$[X+I,Y+I] = [X'+I, Y'+I]$.

Se verifica que $\mathfrak{g}/I$ adquiere la estructura del álgebra de Lie, la cual denominaremos el álgebra cociente $\mathfrak{g}/I$.

Definición 3.3.7. *Una transformación lineal $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ con $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie es un:*

1. *Homomorfismo, si $T([a,b]) = [T(a),T(b)]\ \forall\ a,b \in \mathfrak{g}$.*
2. *Isomorfismo, si es un homorfismo biyectivo.*
3. *Epimorfismo, si es suprayectivo, es decir, si la imagen de T es $\mathfrak{h}$.*
4. *Automorfismo, si es isomorfismo y $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.*

Definición 3.3.8. *De los Homomorfismos se puede definir:*

1. *El kernel de T*

$$Ker(T) = \{[a,b] \mid [T(a),T(b)] = 0\}.$$

2. *El conjunto de las imagenes de T*

$$Im(T) = \{T[a,b] \in \mathfrak{h} \mid a,b \in \mathfrak{g}\}.$$

Los endomorfismos juegan un papel muy importante en la teoría de álgebras de Lie, los cuales lo abordaremos en esta sección. Además, indicaremos que ciertos espacios vectoriales de dimensión finita y álgebras asociativas sobre $\mathbb{F}$ jugarán un rol importante en el estudio de representaciones.

Definición 3.3.9. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$. Entonces definimos el endomorfismo, la cual se nota como $End(V) = \{T \mid V \to V$ es lineal $\}$.*

Ejemplo 3.3.6 (Álgebra de Lie general lineal)**.** *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, de ahora en adelante, escribiremos $\mathfrak{gl}(V)$ en lugar de $End(V)$ considerado como una álgebra de Lie con $[X,Y] = XY - YX$, y escribiremos $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ para denotar $M_n(\mathbb{F})$ como una álgebra de Lie bajo el conmutador de matrices. Si $dim(V)$ es de dimensión finita, digamos n, podemos fijar una base para V y entonces la correspondencia entre las transformaciones lineales y sus respectivas matrices nos dan un isomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$. A esta álgebra de Lie se le llama el álgebra de Lie general lineal.*

A continuación presentamos los teoremas de isomorfismos en álgebras de Lie, su demostración es analoga a la teoria de grupos y puede ser consultada en la tesis de Olaya[5]

Teorema 3.3.1 (Primer Teorema de Isomorfismo)**.** *Sea $\varphi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}'$ un homomorfismo de álgebras de Lie, si I es un ideal de $\mathfrak{g}$ incluido en el $Ker\ \varphi$ entonces existe un único homomorfismo de álgebras $\psi : \mathfrak{g}/I \mapsto \mathfrak{g}'$ de Lie que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathfrak{g}' \\ & \mathfrak{g}/I \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

tal que $\psi \circ \pi = \varphi$, donde $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ es la proyección canónica, esto es que para $X \in \mathfrak{g}$, $\pi(X) = X + I$. Particularmente tenemos que

$$\frac{\mathfrak{g}}{Ker\varphi} \cong Im\,\varphi.$$

Teorema 3.3.2 (Segundo Teorema de Isomorfismo)**.** *Si I, J son ideales de $\mathfrak{g}$ entonces*

$$\frac{I+J}{J} \cong \frac{I}{I \cap J}$$

donde el isomorfismo esta dado naturalmente.

Teorema 3.3.3 (Tercer Teorema de Isomorfismo)**.** *Si I, J son ideales de $\mathfrak{g}$ tales que $I \subset J$, entonces J/I es un ideal de $\mathfrak{g}/I$ y por lo tanto tenemos el isomorfismo natural entre*

$$\frac{\mathfrak{g}/I}{J/I} \cong \frac{\mathfrak{g}}{J}.$$

[5]Olaya, A. Caracterización de las álgebras de Lie Nilpotentes y Solubles. Universidad de los Llanos. 2017.

Ejemplo 3.3.7. *Suponga que $\mathfrak{g}$ se escribe como suma directa $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, como $\mathfrak{h}_1$ es ideal y $\mathfrak{h}_2$ una subálgebra. Entonces,*

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1 \approx \mathfrak{h}_2.$$

El isomorfismo está dado por $X \in \mathfrak{h}_2 \mapsto \bar{X} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$.

3.3.2. REPRESENTACIONES Y DERIVACIONES

En esta sección presentamos el estudio de la representación adjunta y derivaciones, para ello es necesario presentar algunas nociones básicas e importantes que apoyaran al desarrollo de la temática .

Definición 3.3.10 (Representación)**.** *Si V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces un homomorfismo $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, se denomina representación de $\mathfrak{g}$ sobre V.*

Ejemplo 3.3.8. *Si $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ es una subálgebra, la inclusión define, trivialmente, una representación de $\mathfrak{g}$ en V denominada representación canónica.*

Definición 3.3.11. *Sea una representación T de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$. Esto es, $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, se denomina representación fiel si $Ker(T) = \{0\}$.*

Definición 3.3.12. *(Representación adjunta) Para un elemento X de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, sea la transformación lineal*

$$ad_X : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$$

definida por

$$ad_X(Y) = [X,Y],\ \forall\, Y \in \mathfrak{g}.$$

La aplicación

$$ad : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),$$

donde,

$$ad(X) = ad_X,\ \forall\, X \in \mathfrak{g}.$$

define una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$, denominada representación adjunta.

Ejemplo 3.3.9. *(Representación adjunta de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$) Veamos la representación adjunta de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$, las matrices de esta subálgebra son de la forma:*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Una base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ es el conjunto $\{X,H,Y\}$. Donde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al calcular la adjunta con respecto a X obtenemos que:

$$ad_X(Y) = [X,Y] = H$$

Comprobemos que $ad_X(Y) = [X,Y] = H$

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= XY - YX \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = H.
\end{aligned}$$

Podemos escribir que:

$$ad_X = \begin{array}{c} \\ X \\ H \\ Y \end{array} \begin{pmatrix} ad_X(X) & ad_X(H) & ad_X(Y) \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al calcular la adjunta con respecto a $ad_X(X) = [X,X] = 0$ obtenemos que:

Comprobemos que $ad_X(X) = [X,X] = 0$

$$\begin{aligned}
[X,X] &= XX - XX \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Al calcular la adjunta con respecto a $ad_X(H) = [X,H] = -2X$ obtenemos que:

Comprobemos que $ad_X(H) = [X,H] = -2X$.

$$
\begin{aligned}
[X,H] &= XH-HX \\
&= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=-2X.
\end{aligned}
$$

De la misma forma se pueden calcular ad_H y ad_Y y obtener que:

$$
ad_H = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} ad_X(X) & ad_X(H) & ad_X(Y) \end{array} \\
\begin{array}{c} X \\ H \\ Y \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{array} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
$$

y

$$
ad_Y = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} ad_X(X) & ad_X(H) & ad_X(Y) \end{array} \\
\begin{array}{c} X \\ H \\ Y \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Como $\{X,Y,H\}$ es una base para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ podemos escribir

$$ad_A = ad(aH+bX+cY)$$

$$ad_A = a\,ad_H + b\,ad_X + c\,ad_Y$$

por lo tanto se puede definir de forma general la aplicación $ad : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{F}) \to \mathfrak{sl}(3,\mathbb{F})$, es decir, dado $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ obtenemos que $ad_A = \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix} \in$ $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{F})$.

Definición 3.3.13. *[Derivaciones] Una derivación de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una aplicación lineal $D : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ tal que para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ satisface la siguiente igualdad*

$$D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY].$$

De una forma mas general, una derivación de una álgebra es una transformación lineal que satisface la regla de Leibnitz para la derivada de un producto $D(XY) = D(X)Y + XD(Y)$.

Ejemplo 3.3.10. *Toda transformación lineal de una álgebra abeliana es una derivación.*

Solución. *Sea $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ una transformación lineal, de las Definiciones (3.1.2) y (3.3.13) tenemos que,*

$$T[X,Y] = [T(X),Y] + [X,T(Y)] = 0+0 = 0.$$

Por tanto, es una derivación.

Proposición 3.3.3. *La representación adjunta es una derivación.*

Demostración. Por definición de representación adjunta tenemos que

$$ad_X[Y\,,Z] = [X\,,[Y\,,Z]]$$

y por la ecuación (3.5) obtenemos que

$$ad_X[Y\,,Z] = [[X\,,Y]\,,Z] + [Y\,,[X\,,Z]] = [ad_XY\,,Z] + [Y\,,ad_XZ]$$

por lo tanto ad_X es una derivación. □

Las derivaciones que tienen como imagen un subconjunto de $\mathfrak{g}$, como la adjunta son consideradas derivaciones internas. En caso contrario, $\mathfrak{g}$ se denomina externa.

Ejemplo 3.3.11. *(Derivación de álgebra de Lie) El conjunto de todas las derivaciones de $\mathfrak{g}$ lo denotaremos por $\mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$, el cual es un subespacio vectorial del álgebra asociativa $\mathfrak{gl}(V)$. Si definimos a $[D,D'] = DD' - D'D$ como un corchete para $[D,D'] \in \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$, podemos verificar que*

$$\begin{aligned}
[D,D'](XY) &= DD'(XY) - D'D(XY)\\
&= D(D'(X)Y + XD'(Y)) - D'(D(X)Y + XD(Y))\\
&= DD'(X)Y + DXD'(Y) + XDD'(Y) + D'XD(Y) - DXD'(Y)\\
&\qquad\qquad - XD'D(Y) - D'D(X)Y - D'XD(Y)\\
&= DD'(X)Y + D'XD(Y) + DXD'(Y) + XDD'(Y) - D'D(X)Y\\
&\qquad\qquad - DXD'(Y) - D'XD(Y) - XD'D(Y)\\
&= DD'(X)Y + XDD'(Y) - D'D(X)Y - XD'D(Y)\\
&= DD'(X)Y - D'D(X)Y + XDD'(Y) - XD'D(Y)\\
&= [D,D'](XY) + X[D,D'](Y).
\end{aligned}$$

Así, podemos ver que $\mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$ con $[,] : \mathfrak{Der}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$ es una álgebra de Lie llamada el álgebra de derivaciones del álgebra $\mathfrak{g}$.

3.4. ÁLGEBRAS DE LIE SOLUBLES Y NILPOTENTES

En esta sección mencionamos el concepto de una álgebra de Lie soluble y nilpotente. Sin embargo, hablaremos primero de la serie derivada y la serie central descendente, ya que serán la base para poder definirlas:

Definición 3.4.1. *Definimos por inducción los siguientes subespacios de $\mathfrak{g}$ llamadas subálgebras derivadas de $\mathfrak{g}$:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{'} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)})]. \end{aligned}$$

*La serie $\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}', ..., \mathfrak{g}^{(k)}$ se les conoce como **serie derivada** de $\mathfrak{g}$.*

Definición 3.4.2. *La **serie central descendente** de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está definida por inducción de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{1} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{2} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{k} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4.1. *Sea $\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ y $\mathfrak{g}' = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ álgebras de Lie, entonces:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{2} &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -29 & 30 \\ 8 & 29 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}^{3} &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -29 & 30 \\ 8 & 29 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -126 & 354 \\ -338 & 126 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}^{4} &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -126 & 354 \\ -338 & 126 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2784 & 2880 \\ 768 & 2784 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathfrak{g}^{k}$ es una serie central descendente.

Definición 3.4.3. *Se dice que $\mathfrak{g}$ es una álgebra soluble, si alguna de sus álgebras derivadas se anula para algún $k_0 \geq 1$, es decir,*

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = \{0\},$$

y para todo $k \geq k_0$, $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$.

Ejemplo 3.4.2. *El subespacio $\mathfrak{g}$ generado por las matrices superiores de orden 3, es un álgebra de Lie soluble, en efecto:*

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & a & * \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}^{(3)} = [\mathfrak{g}^{(2)}, \mathfrak{g}^{(2)}] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Proposición 3.4.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie.*

1. *Si $I \trianglelefteq \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g}/I$ es soluble, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.*
2. *$I/I \cap J$ es soluble,entonces $(I+J)/J$ es soluble*
3. *$I+J$ es soluble*
4. *Si $\mathfrak{g}$ es soluble y $I \trianglelefteq \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}/I$ es soluble.*
5. *Si $I, J \trianglelefteq \mathfrak{g}$, entonces $I+J$ es soluble.*

Demostración.

1. Por hipótesis, existen $n, s \in \mathbb{N}$ tales que $(\mathfrak{g}/I)^{(n)} = I$ y $I^{(s)} = \langle 0 \rangle$. Consideremos la proyección canónica $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$, $\pi(x) = x + 1$. Como π es sobre, entonces $\pi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/I$. Por tanto,
$$I = (\mathfrak{g}/I)^{(n)} = (\pi(\mathfrak{g}))^{(n)} = \pi(\mathfrak{g}^{(n)}) = \mathfrak{g}^{(n)} + I$$
Entonces $\mathfrak{g} \subseteq I$ y se verifica que $(\mathfrak{g}^{(n)})^{(s)} \subseteq I^{(s)} = \langle 0 \rangle$. Tenemos entonces que $\mathfrak{g}^{(n+s)} = \langle 0 \rangle$.
2. Como $I/I \cap J$ es soluble, por el Teorema (3.3.2) tenemos que $I/I \cap J \cong (I+J)/J$ entonces $(I+J)/J$ es soluble.
3. Como $(I+J)/J$ es soluble, Por 1. $J \trianglelefteq I+J$, entonces $I+J$ es soluble.
4. Consideremos nuevamente la proyección canónica π. Dado que esta es un epimorfismo, Por 2. se tiene que $\mathfrak{g}/I$ es soluble.
5. Como I, J son solubles, entonces por 2. Se tiene que $I \cap J$ es soluble. La proyección canónica $\pi : I \to I/(I \cap J)$ es sobre, $\pi(I) = I/I \cap J$, entonces $I+J$ es soluble

□

El Profesor Navarro[6] describe que, la definición de álgebra de Lie soluble se encuentra en los trabajos de Abel y Galois porque imita la noción correspondiente en la teoría de Grupos. Sin embargo, la idea general que se tiene de las álgebras nilpotentes es que son un campo de estudio más reciente y son modeladas a partir de la noción de las álgebras de Lie.

Definición 3.4.4. *Se dice que $\mathfrak{g}$ es una álgebra nilpotente, si su serie central descendente se anula para algún $k_0 \geq 1$, es decir,*

$$\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\},$$

y para todo $k \geq k_0$, $\mathfrak{g}^k = \{0\}$.

Ejemplo 3.4.3. *El subespacio $\mathfrak{g}$ generado por las matrices superiores de orden 3, es un álgebra de Lie nilpotente, en efecto:*

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & a & * \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}^4 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^3] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Teorema 3.4.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie.*

1. *Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces todas las subálgebras de $\mathfrak{g}$ son nilpotentes.*
2. *Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente y $I \trianglelefteq \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}/I$ es nilpotente.*
3. *Si $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ es nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.*
4. *Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente y distinta de cero, entonces $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$.*

Demostración.

1. Si $A \subseteq \mathfrak{g}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, entonces $[A, A] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y en general $A^s \subseteq \mathfrak{g}^s$, para todo s. Por lo tanto, si $\mathfrak{g}^k = 0$ para algún k, entonces se cumple que $A^k = 0$ en consecuencia A es nilpotente.

[6]Navarro, M. Generalización de las subálgebras de Cartan para álgebras de Lie solubles de dimensión finita. Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellin. 2006.

2. Por hipótesis tenemos que $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces todas sus imágenes homomórficas lo son, esto es; si $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, se tiene que $\phi(\mathfrak{g}^s) = \phi^s(\mathfrak{g})$.
   Ahora, el mapeo canónico $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ es un epimorfismo. Por lo dicho anteriormente, se tiene que $\mathfrak{g}/I$ es nilpotente.

3. Supongamos que existe un k tal que $(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}))^k = Z(\mathfrak{g})$. Considerando el mapeo canónico $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ esto equivale a

$$\mathfrak{g}^k + Z(\mathfrak{g}) = \pi(\mathfrak{g}^k) = \pi^k(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}))^k = Z(\mathfrak{g}).$$

   Por lo tanto, $\mathfrak{g}^k \subseteq Z(\mathfrak{g})$, pero $[\mathfrak{g}, Z(\mathfrak{g})] = 0$, entonces $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subseteq [\mathfrak{g}, Z(\mathfrak{g})] = 0$ y se tiene así que $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

4. Supongamos que existe un k tal que $\mathfrak{g}^k = 0$ y $\mathfrak{g} \neq 0$, pero $\mathfrak{g}^{k-1} \neq 0$. Entonces $0 = \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]$ significa que $\mathfrak{g}^{k-1} \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Por tanto, $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$.

$\square$

3.5. TEOREMA DE ENGEL

En esta sección probaremos el Teorema de Engel que establece la equivalencia entre el hecho de que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sea nilpotente y que todos los elementos del álgebra $\mathfrak{g}$ sean ad-nilpotentes.

Definición 3.5.1. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Un elemento $X \in \mathfrak{g}$ se llama **ad-nilpotente** si $ad_X = \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es nilpotente.*

Proposición 3.5.1. *Si $X \in \mathfrak{gl}(V)$ es nilpotente entonces ad_X es nilpotente.*

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{gl}(V)$ un elemento nilpotente y asociemos a X dos automorfismos de $End(V)$[7], $\lambda_X(Y) = XY$ y $\rho_X(Y) = YX$ las traslaciones a izquierda y derecha respectivamente, claramente son estas traslaciones automorfismos nilpotentes, ya que X es nilpotente. Además para cualquier anillo en especial $End(End(V))$, la suma o diferencia de dos automorfismos nilpotentes es nilpotente entonces $ad_X = \lambda_X(Y) - \rho_X(Y)$ es nilpotente. $\square$

Proposición 3.5.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ con V un espacio de dimensión finita. Si $\mathfrak{g}$ consiste de endomorfismos nilpotentes y $V \neq 0$ entonces existe $v \in V, v \neq 0$ tal que $\mathfrak{g}.v = 0$.*

Demostración. La siguiente demostración la haremos por inducción sobre la dimensión de $\mathfrak{g}$. Si la dimensión de $\mathfrak{g}$ es igual a 1, sea $X \in \mathfrak{g}$, como X es nilpotente

[7]Es el conjunto de todos los automorfismos definido es V.

existe un $k \geq 1$ tal que $X^k = 0$ y $X^{k-1} \neq 0$, sea $W \in V$ tal que $v = X^{k-1}.W \neq 0$ y $Xv = X.X^{k-1}.W = 0$. Supongamos que $K \neq \mathfrak{g}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$. De acuerdo con la Proposición (3.5.1), K actúa como una álgebra de Lie de automorfismo nilpotente sobre el espacio vectorial $\mathfrak{g}$, y también sobre el espacio vectorial $\mathfrak{g}/K$. Como $dim K < dim\,\mathfrak{g}$, la hipótesis de inducción nos proporciona un vector $X + K \neq K$ en $\mathfrak{g}/K$ anulado por una imagen de K en $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/K)$, es decir, $[Y,X] \in K$ para todo $Y \in K$, con $X \notin K$. En otras palabras K esta propiamente contenido en $N(K)$.

Ahora, si K es una subálgebra propia maximal de $\mathfrak{g}$, el argumento precedente implica que $N(K) = \mathfrak{g}$, o sea, que K es un ideal de $\mathfrak{g}$. Si la dimensión de $\mathfrak{g}/K < 1$, entonces la imagen inversa en $\mathfrak{g}$ de una subálgebra unidimensional de $\mathfrak{g}/K$ será una subálgebra propia contenida en K propiamente, lo que contradice la hipótesis de maximalidad de K; por lo tanto K tiene codimensión 1. Esto nos permite escribir $\mathfrak{g} = K + Z$ para cualquier $Z \in \mathfrak{g} - K$.
Por inducción, $W = \{v \in V : K.v = 0\}$ es no nulo. Como K es un ideal, W es invariante bajo $\mathfrak{g}$. En efecto, sean $X \in \mathfrak{g}, Y \in K$, y $v \in W$ implica que $[X,Y].v = XY.v - YX.v = 0$. Escojamos $Z \in \mathfrak{g} - K$, como arriba, de modo que el automorfismo Z (ahora actuando sobre el subespacio W) tenemos un autovector, es decir, que existe un vector no nulo $v \in W$ para el cual $Z.v = 0$. Finalmente, tenemos que $\mathfrak{g}.v = 0$, es decir, $X.v = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. $\square$

Teorema 3.5.1 (Teorema de Engel)**.** *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie constituida por elementos ad$-$nilpotentes, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.*

Demostración. Los elementos $\mathfrak{g}$ son ad-nilpotentes, luego el álgebra $ad_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ satisface la hipótesis de la Proposición (3.5.2). Asumiendo $\mathfrak{g} \neq 0$, tenemos un vector $X \neq 0$ en $\mathfrak{g}$ para el cual $[\mathfrak{g}, X] = 0$, en consecuencia, $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Pero a su vez, $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ también es ad-nilpotente y tiene dimensión menor $\mathfrak{g}$. Nuevamente por la hipótesis de inducción aplicada a la dimensión de $\mathfrak{g}$ garantizamos que $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ es nilpotente, y en consecuencia $\mathfrak{g}$ es nilpotente. $\square$

3.6. SUBÁLGEBRAS DE CARTAN

A continuación, presentamos la definición de subálgebra de Cartan y nos extenderemos con algunos argumentos necesarios para mostrar la existencia de subálgebras de Cartan en las álgebras de Lie solubles de dimensión finita.

Para comenzar y por simple comodidad, haremos un cambio un cambio en la definición (3.3.12). Definimos $ad_X(Y) = [Y,X]$ en lugar de $ad_X(Y) = [X,Y]$. Este cambio no afecta la teoría porque $[X,Y] = -[Y,X]$ y las álgebras y las subálgebras de Lie son ante todo espacios vectoriales y ad_X transformaciones lineales para todo X en una álgebra de Lie.

Definición 3.6.1. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Una subálgebra de Cartán de $\mathfrak{g}$ es una subálgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$*

1. *$\mathfrak{h}$ es nilpotente, esto es, $\mathfrak{h}^{k_0} = \{0\}$ para algún $k_0 \geq 1$.*
2. *El normalizador de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ coincide con $\mathfrak{g}$ está condición es equivalente a decir que si $[x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$, entonces $x \in \mathfrak{h}$.*

Como ya habiamos mencionado en la Definición (3.3.5); el normalizador es la subálgebra más grande de $\mathfrak{g}$ en la cual $\mathfrak{h}$ es un ideal. Llamada subálgebra maximal.

Ejemplo 3.6.1. *Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}), \mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \right\}$ es una subálgebra de Lie nilpotente por ser Abeliana. Además $\mathfrak{h}$ es claramente su propio normalizador por la misma razón, luego $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.*

En general el subconjunto de matrices diagonales de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n},\mathbb{F})$ es una subálgebra de Cartan debido a que es una subálgebra de Lie nilpotente por ser una subálgebra abeliana y ella su propio normalizador.

Ejemplo 3.6.2. *Una subálgebra de Cartan del álgebra de Lie de matrices de orden n sobre un campo $\mathbb{F}$ es el álgebra de todas las matrices diagonales.*

Nuestra atención se vuelve ahora hacia una relación entre dos campos K y $\mathbb{F}$, veamos:

Definición 3.6.2. *Si K es un campo que contiene al subcampo $\mathbb{F}$, entonces se dice que K es un campo de extensión (o simplemente una extensión) de $\mathbb{F}$, denotado $K/\mathbb{F}$. Esta notación es abreviatura de "K sobre $\mathbb{F}$".*

Definición 3.6.3. *El grado de una extensión de campo $K/\mathbb{F}$, denotado $[K : \mathbb{F}]$, es la dimensión de K como un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Se dice que la extensión K es finita si $[K : \mathbb{F}]$ es finito.*

El siguiente teorema demostrará ser una herramienta extremadamente útil en nuestra investigación de extensiones finitas.

Teorema 3.6.1. *Si E es una finita extensión de $\mathbb{F}$ y K es finita extensión de E, entonces K es una extensión finita de $\mathbb{F}$ y*

$$[K : \mathbb{F}] = [K : E][E : \mathbb{F}].$$

Demostración. Se probara que K es una extensión finita de $\mathbb{F}$ mostrando explícitamente una base finita de K sobre $\mathbb{F}$.

Si $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ es una base para E como un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $\{\beta_1,...,\beta_2\}$ es una base para K como un espacio vectorial sobre E. Afirmamos que $\{\alpha_i\beta_i\}$ es una base para K sobre $\mathbb{F}$.

1. Primero mostraremos que estos vectores abarcan K. Si $u \in K$, entonces $u = \sum_{j=1}^{m} b_j\beta_j$ y $b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_i$, donde $b_j \in E$ y $a_{ij} \in \mathbb{F}$. Entonces

$$u = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\right)\beta_j = \sum_{ij} a_{ij}(\alpha_i\beta_j).$$

Para los mn vectores $\alpha_i\beta_j$ debe abarcar K sobre $\mathbb{F}$.

2. Mostraremos que $\{\alpha_i\beta_j\}$ son linealmente independientes. Recordemos que de la Definición (1.3.2) un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ en un espacio vectorial V son linealmente independientes si

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0, \text{ implica que } c_1 = c_2 = ... = c_n = 0.$$

Por tanto,

$$u = \sum_{ij} c_{ij}(\alpha_i\beta_j) = 0, \ \forall\ c_{ij} \in \mathbb{F}.$$

3. Ahora, necesitaremos probar que todos los c_{ij} son cero. Podemos reescribir u como:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i\right)\beta_j = 0, \text{ donde} \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i \in E.$$

Ya que los β_{ij} son linealmente independientes sobre E, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i = 0, \ \forall\ j.$$

Sin embargo, los a_j son linealmente independientes sobre F. Por lo tanto, $c_{ij} = 0, \ \forall\ i, j$.

Por 1. 2. y 3. comprobamos que se cumple el resultado más fuerte afirmado en el teorema, este es: $[K : \mathbb{F}] = [K : E][E : \mathbb{F}]$. □

Definición 3.6.4. *Si K es una extensión del campo base $\mathbb{F}$ y denotamos por $\mathfrak{g}_K$ el álgebra sobre K así obtenida de $\mathfrak{g}$, entonces tenemos que para cualquier subálgebra $U \leq \mathfrak{g}$,*

$$N_{\mathfrak{g}(K)}(U_K) = (N_{\mathfrak{g}}(U))_K.$$

Ejemplo 3.6.3. *Si K es una extensión de $\mathbb{F}$ tal que $[K:\mathbb{F}]$ es primo, entonces no hay campos intermedios entre $\mathbb{F}$ y K.*

Definición 3.6.5. *Dado un polinomio no nulo $f(x) = \sum_i a_i x^s \in A\{x_1,...,x_n\}$, se llama grado o grado total, la cual se nota por $deg(f)$, al mayor exponente s al que aparece elevado la variable x, siendo $a_i \neq 0$, esto es,*

$$deg(f) := max\{s \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid a_i \neq 0\},$$

si $f(x) = 0$ entonces $deg(f) := -\infty$

Proposición 3.6.1. *Un polinomio $f \in A\{x_1,...,x_n\}$ es homogéneo si todos sus monomios no nulos tienen el mismo grado. Si f es homogéneo de grado total s se tiene la igualdad,*

$$f(tx_1,...,tx_n) = t^s f(x_1,...,x_n).$$

Demostración. En efecto, cada monomio $g \in A[x_1,...,x_n]$ de grado s se escribe como $g := ax_1^{v_1},...,x_n^{v_n}$ donde $v_1 + ... + v_n = s$, luego

$$\begin{aligned} g(tx_1,...,tx_n) &= a(tx_1)^{v_1},...,(tx_n)^{v_n} \\ &= t^{v_1+...+v_n} ax_1^{v_1},...,x_n^{v_n} = t^s g(x_1,...,x_n). \end{aligned}$$

En consecuencia, si $f = g_1 + ... + g_r$ es suma de monomios de grado s se tiene

$$\begin{aligned} f(tx_1,...,tx_n) &= \sum_{i=1}^{r} g_i(tx_1,...,tx_n) \\ &= t^s \sum_{i=1}^{r} g_i(x_1,...,x_n) = t^s f(x_1,...,x_n) \end{aligned}$$

□

Lema 3.6.1. *Si $f(x_1,....,x_n)$ es un polinomio homogéneo distinto de cero de grado total s sobre un campo $\mathbb{F}$ con $|\mathbb{F}|$[8] $> s$, entonces existen $a_1,....,a_n \in \mathbb{F}$ tales que $f(a_1,....,a_n) \neq 0$.*

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre n.

Si $n = 1, f(x_1) = bx_1^s$, donde b es un elemento de $\mathbb{F}$ distinto de cero. Como un polinomio de grado s por el Teorema (3.6.1) tiene a lo más s raíces y $|\mathbb{F}| > s$, entonces existe un $a_1 \in \mathbb{F}$ tal que $f(a_1) \neq 0$.

Supongamos que $f(x_1,....,x_{n-1})$ es un polinomio de homogéneo distinto de cero de grado total s sobre $\mathbb{F}$ con $|\mathbb{F}| > s$ y que existen $a_1,....,a_{n-1}$ tales que $f(a_1,....,a_{n-1}) \neq 0$.

[8]Denota el número de elementos de $\mathbb{F}$.

Sea $f(x_1,...,x_n)$ un polinomio homogéneo distinto de cero de grado s con $|\mathbb{F}| > s$. Entonces, $f(a_1,...,a_{n-1},x_n)$ es un polinomio distinto de cero en x_n.

Con respecto al grado de $f(a_1,...,a_{n-1},x_n)$ tenemos: Grado de $f(a_1,...,a_{n-1},x_n)$ es menor que s o grado de $f(a_1,...,a_{n-1},x_n)$ es igual a s. Si grado de $f(a_1,...,a_{n-1},x_n)$ es menor que s, entonces existe $a_n \in \mathbb{F}$ tal que $f(a_1,...,a_{n-1},x_n) \neq 0$, porque un polinomio de grado n tiene a lo más n raíces por el Teorema (3.6.1) y $|\mathbb{F}| > s$.

Si grado de $f(a_1,...,a_{n-1},x_n)$ es igual a s, entonces $f(a_1,...,a_{n-1},x_n) = bx_n^s + \sum_{j=0}^{n<s} b_j x^j$, con $b \in \mathbb{F}, b \neq 0$. Esto implica que $f(0,0,...,1) = b$. Por lo tanto, existen $a_1,...,a_n \in \mathbb{F}$ tales que $f(a_1,...,a_{n-1},x_n) \neq 0$. $\square$

Lema 3.6.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Entonces, para todo $X \in \mathfrak{g}$,*

$$E_{\mathfrak{g}}(X) := \{Z \in \mathfrak{g} \mid ad_X^r(Z) = 0, \textit{ para algún } r \in \mathbb{N}\},$$

es una subálgebra de $\mathfrak{g}$.

Demostración. Para todo $X \in \mathfrak{g}$ se tiene que $X \in E_{\mathfrak{g}}(X)$. Por lo tanto, $E_{\mathfrak{g}}(X) \neq \emptyset$.

Sean $X_1, X_2 \in E_{\mathfrak{g}}(X)$. Entonces existen $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ tales que $ad_X^{r_1}(X_1) = 0$ y $ad_X^{r_2}(X_2) = 0$.

Entonces si definimos $r := max\{r_1, r_2\}$ se tiene

$$ad_X^r(X_1 + X_2) = ad_X^r(X_1) + ad_X^r(X_2) = 0.$$

Por lo tanto, $X_1 + X_2 \in E_{\mathfrak{g}}(X)$.

Por otra parte, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ se tiene que $ad_X^{r_1}(\alpha x_1) = \alpha ad_X^{r_1}(X_1) = \alpha 0 = 0$. Entonces $\alpha X_1 \in E_{\mathfrak{g}}(X)$ y con ello tenemos que, $E_{\mathfrak{g}}(X)$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$.

Como ad_X pertenece a la derivación, se verifica que

$$ad_X^{r_1+r_2}[X_1, X_2] = \sum_{k=0}^{r_1+r_2} \begin{pmatrix} r_1 + r_2 \\ k \end{pmatrix} \left[ad_X^{r_1+r_2-k}(X_1), ad_X^k(X_2)\right].$$

Por lo tanto, $[X_1, X_2] \in E_{\mathfrak{g}}(X)$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$. $\square$

Estas subálgebras son usadas con mucha frecuencia en la teoría de álgebras de Lie y por tanto merecen un nombre, él Profesor Navarro[9] *las llama subálgebras de Engel, por su conexión con el Teorema de Engel.*

[9] Navarro, M. Generalización de las subálgebras de Cartan para álgebras de Lie solubles de dimensión finita, 2006.

Lema 3.6.3. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$ que contiene una subálgebra de Engel $E_{\mathfrak{g}}(X)$, entonces $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{h} \subseteq E = \mathfrak{g}_0(ad_X)$. Entonces $X \in E \subseteq \mathfrak{h}$. Así que, $[X,\mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ y $[X,N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})] \subseteq \mathfrak{h}$. La ad_X estabiliza $E,\mathfrak{h}$ y $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Pero sabemos que ad_X actua como un automorfismo sobre $\mathfrak{g}/E$ y por lo tanto en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. La ad_X anula $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$. Por lo tanto $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h} = 0$. Así concluimos que, $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. □

Definición 3.6.6. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Una subálgebra de Engel $E_{\mathfrak{g}}(X)$ se llamará minimal si y sólo si $dim(E_{\mathfrak{g}}(X)) \leq dim(E_{\mathfrak{g}}(Y))$, $\forall\, Y \in \mathfrak{g}$.*

Teorema 3.6.2. *Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Supongamos que $\mathfrak{h} \leq U \leq \mathfrak{g}$. Entonces $N_{\mathfrak{g}}(U) = U$.*

Demostración. Es suficiente demostrar que $N_{\mathfrak{g}_K}(U_K) = U_K$, para alguna extensión K del campo base $\mathbb{F}$.

Si $dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}) = n$, entonces suponemos que $\mid \mathbb{F} \mid = \infty$, porque siempre podemos extender el campo base para obtener $\mid \mathbb{F} \mid > dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$. Como $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, por el Lema (3.6.1), tenemos que $\mathfrak{h}$ es minimal Engel. Entonces existe un $K \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{h} = E_{\mathfrak{g}}(K)$. Como $E_{\mathfrak{g}}(K)$ es autonormalizante, es decir, $N_{\mathfrak{g}_K}(E_{\mathfrak{g}}(K)) = E_{\mathfrak{g}}(K)$. □

Lema 3.6.4. *Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ y sea I un ideal de $\mathfrak{g}$. Entonces $(\mathfrak{h}+I)/I$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}/I$.*

Demostración. Dado que I es un ideal de $\mathfrak{g}$, se tiene que $\mathfrak{h} \cap I$ es un ideal de $\mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h}$ es nilpotente y $\mathfrak{h} \cap I$ es un ideal de $\mathfrak{h}$, por el teorema (3.4.1), se verifica que $\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap I$ es nilpotente. Usando los teoremas de isomorfismos tenemos que $(\mathfrak{h}+I)/I$ es nilpotente, ya que $(\mathfrak{h}+I)/I \cong \mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap I)$. Supongamos que $X+I \in N_{\mathfrak{g}/I}((\mathfrak{h}+I)/I)$. Entonces $[X,h]+I \in (\mathfrak{h}+I)/I$, para $h \in \mathfrak{h}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} [X+I,\mathfrak{h}+I] &= \langle [X+a,h+b] \mid h \in \mathfrak{h},\ a,b \in I \rangle \\ &= \langle [X,h]+c \mid h \in \mathfrak{h},\ c \in I \rangle \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [X,\mathfrak{h}+I] &= \langle [X,h+a] \mid h \in \mathfrak{h},\ a \in I \rangle \\ &= \langle [X,h]+[X,a] \mid h \in \mathfrak{h},\ a \in I \rangle \\ &= [X,h]+d \mid h \in \mathfrak{h},\ d \in I \rangle \end{aligned}$$

Entonces, $X+I \in N_{\mathfrak{g}/I}((\mathfrak{h}+I)/I)$ si y sólo si $[X+I,\mathfrak{h}+I] \subseteq \mathfrak{h}+I$. Dado que $[X,\mathfrak{h}+I] \subseteq \mathfrak{h}+I$, se tiene que $X \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}+I) = \mathfrak{h}+I$. Si $X \in (\mathfrak{h}+I)$, entonces $X+I \in (\mathfrak{h}+I)/I$. Por lo tanto,

$$N_{\mathfrak{g}/I}((\mathfrak{h}+I)/I) \subseteq (\mathfrak{h}+I)/I$$

y como también $(\mathfrak{h}+I)/I \subseteq N_{\mathfrak{g}/I}((\mathfrak{h}+I)/I)$, se tiene que

$$N_{\mathfrak{g}/I}((\mathfrak{h}+I)/I) = (\mathfrak{h}+I)/I,$$

por tanto, $(\mathfrak{h}+I)/I$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}/I$. $\square$

Lema 3.6.5. *Sea $I \trianglelefteq \mathfrak{g}$ y $I \leq U \leq \mathfrak{g}$. Supóngase que U/I es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ y que $\mathfrak{h}$ es una subálgebra Cartan de U. Entonces $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Es claro que $\mathfrak{h}$ es nilpotente. Supóngase que $X \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Entonces $X+I \in N_{\mathfrak{g}/I}((\mathfrak{h}+I)/I)$. Pero $(\mathfrak{h}+I)/I$ es una subálgebra de Cartan de U/I y U/I es nilpotente. Por lo tanto, $\mathfrak{h}+I = U$ y $X+I \in N_{\mathfrak{g}/I}(U/I) = U/I$. Esto implica que $X \in U$ y así tenemos que $X \in N_U(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. $\square$

Axioma 3.6.1. *(Axioma de Elección) Sea A un conjunto no vacío cuyos elementos son conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos. Existe un conjunto D tal que $D \cap B$ es un conjunto unitario para todo B de A.*

Ejemplo 3.6.4. *Dada una colección de conjuntos $A, B, C, \ldots$ con elementos, es posible elegir un elemento de cada conjunto, es decir:*

$$A = \{1,3,9\},\ B = \{a,b,9\},\ C = \{x,y,9\}.$$

A continuación, demostraremos el resultado central de este trabajo, esto es, establecer la existencia de las subálgebras de Cartan en las álgebras de Lie solubles.

Teorema 3.6.3. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble. Entonces existe una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Supondremos que existen álgebras de Lie de dimensión finita que no admiten subálgebra de Cartan. Dado que la inclusión define un orden parcial y por el axioma (3.6.1), entonces existe un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión minimal que no admite subálgebra de Cartan.

Sea I un ideal minimal de $\mathfrak{g}$. Como $dim(\mathfrak{g}/I) = dim(\mathfrak{g}) - dim(I)$ y además $\mathfrak{g}/I$ es un álgebra de Lie, se verifica que $dim(\mathfrak{g}/I) \leqslant dim(\mathfrak{g})$. Por lo tanto, $\mathfrak{g}/I$ es un álgebra de Lie que admite una subálgebra de Cartan, digamos U/I.

Si $U < \mathfrak{g}$, entonces $dim(U) < dim(\mathfrak{g})$, tenemos entonces U es un álgebra de Lie que admite una subálgebra de Cartan $\mathfrak{g}$. Por el Lema (3.6.5), $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, contrario a la escogencia de $\mathfrak{g}$. Por lo tanto $U = \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}/I$ es nilpotente.

Sea M una subálgebra maximal de $\mathfrak{g}$. Si $M \geqslant I$, entonces M/I es una subálgebra maximal del álgebra nilpotente $\mathfrak{g}/I$, porque si U es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, tal que

$M/I \leqslant U/I$, entonces $U \geqslant I$, por lo tanto $M \geqslant U$, ya que M es máximal. Como consecuencia tenemos que $U/I \leq M/I$ y así se tiene que $M/I = U/I$. Entonces, M/I es una subálgebra maximal de $\mathfrak{g}/I$.

Como M/I es maximal y $\mathfrak{g}/I$ es nilpotente, entonces M es un ideal propio de $\mathfrak{g}$. Si toda subálgebra maximal de $\mathfrak{g}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces por [*10] se tiene que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente. Pero $\mathfrak{g}$ no es nilpotente, por lo tanto existe una subálgebra maximal $\mathfrak{h}$ que no es un ideal de $\mathfrak{g}$.

Para esta $\mathfrak{h}$, tenemos que $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, porque $\mathfrak{h}$ es maximal y $\mathfrak{h} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(H)$ y $H \ngeqslant I$. Como I es un ideal abeliano y $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + I$, entonces se sigue que $\mathfrak{h} \cap I \triangleleft \mathfrak{g}$. Dado que I es minimal, se tiene que $\mathfrak{h} \cap I = \langle 0 \rangle$. Por lo tanto, $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{g}/I$ la cual es nilpotente y $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Por lo tanto, existe una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. $\square$

[10] Barnes, D. On the Cohomology of Lie Algebras. Math. Zeitschr. 101, 343-349 (1967).

4. CONCLUSIONES

Al estudiar algunas nociones básicas sobre álgebras de Lie solubles, la estructura y representación de las subálgebras de Cartan, se concluye que la teoría de grupos es fundamental para este trabajo.

En este trabajo de grado se estudio y se demostró la existencia de las subálgebras de Cartan en las álgebras de Lie solubles, mediante procedimientos matemáticos que permitio enriquecer el conocimiento en un nuevo tema.

La teoría de álgebras de Lie solubles de dimensión finita es inspirado en el desarrollo de la teoría de grupos finitos y fue considerado inicialmente por el Profesor D. Barnes de la Universidad de Sidney. Uno de los aportes centrales de este trabajo de grado consistió en presentar en detalle los resultados originales publicados en el fabuloso artículo donde se demuestra la existencia de las subálgebras de Cartan en las álgebras de Lie solubles del Profesor Barnes y de los resultados de trabajo de tesis que generalizo el Profesor M. Navarro, a partir del trabajo de Barnes, del cual hemos referenciando en este informe de grado.

5. RECOMENDACIONES

Al Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física que hoy en día recibe el nombre de Licenciatura en Matemáticas y es acreditado en alta calidad, es importante que comiencen a construir este conocimiento en los nuevos aprendices, ya sea, con un seminario de poca intensidad horaria o generar cursos electivos en esta temática, a fin de formar a aquellos que hacen parte del programa, en un tema novedoso e interesante.

BIBLIOGRAFÍA

ALVARO, W. Álgebra Lineal I, Capitulo 7: Espacio cociente. Centro de Matemática (CMAT). 2006.

ARCE, C., CASTILLO, W. y GONZÁLEZ, J. Álgebra Lineal. Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemáticas. Tercera edición 2002.

AYRES, F. Teoría y Problemas de Matrices. Dickinson College. Serie Schaum.

BARNES, D. On Cartan Subalgebras of Lie Algebras. Math. Zeitschr. 101, 350-355. 1967.

BARNES, D. On the Cohomology of Lie Algebras. Math. Zeitschr. 101, 343-349. 1967.

CAICEDO, J. Teoría de Grupos, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá. 2004.

CASTRO, A. Clasificación de las álgebras de Lie semisimples de dimensión finita y los diagramas de Dynkin. Tesis de Licenciatura en Matemáticas. Universidad Industrial de Santander, 2005.

DUMMIT, S. y FOOTE, R. Abstract Algebra. 3rd ed. John Wiley Sons, Inc., 2004.

DURÁN, A. Sección Historia Gaceta RSME, Universidad de Sevilla. Vol. 5.1. 2002.

FUENTES, L. y LÓPEZ, V. Introducción a las álgebras de Líe. 2013.

GALINA, E. Conceptos básicos de álgebras de Lie. Universidad Nacional de Córdoba.

GILMORE, R. Lie Groups, Lie Algebras, and some of Their Applications. Jhon Wiley Sons. New York. 1974.

GUTIÉRREZ, I. y NAVARRO, M. Clases de álgebras de Líe y Subálgebras de Cartan, Revista Colombiana de Matemáticas, Universidad del Norte, Colombia. 2008.

HERNÁNDEZ, I. Clasificación de las superálgebras de Lie con álgebra de Lie subyacente $\mathfrak{gl}(V)$ *y algunas generalizaciones sobre algunas clases de álgebras de Lie reductivas. México, 2008.*

HUMPHREYS, J. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Springer Verlag New York Inc., 1972.

HERSTEIN, I. Álgebra Abstracta. Universidad Autónoma de Guadalajara de México. 1986.

JACOBSON, N. Lie Algebras. Interscience., New York, 1962.

JUDSON, T. Abstract Algebra, Theory and Applications, Pág. 329-343. 2010.

KOLMAN, B. y HILL, D. Álgebra Lineal. Octava edición. 2004.

LIMA, E. Algebra linear. Terceira Edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. CNPQ. Rio de Janeiro. 1998.

LIPSCHUTZ, S. Álgebra Lineal. Segunda Edición. Temple University. Serie Schaum.

MARTÍNEZ, H. y SANABRIA, A. Álgebra Lineal. Versión 2013-1.

NAVARRO, M. Generalización de las subálgebras de Cartan para álgebras de Lie solubles de dimensión finita. Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín. 2006.

OLAYA, A. Caracterización de las álgebras de Lie Nilpotentes y Solubles. Universidad de los Llanos. 2017.

OROZCO, G. Álgeras de Lie 3-dimensionales y Grupos de Lie exponenciales. Universidad de Sonora, México, 2011.

RODRÍGUEZ, M. Álgebras de Lie. U. Complutense Madrid, España. 2007.

RODRÍGUEZ, E. Sistemas de raíces abstractas y álgebras de Lie. Universidad de Sonora .

PINZÓN, S. Variedades bandeira, f –Estruturas e métricas (1-2)- simpléticas. Ph. D Tesis, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2003.

PINZÓN, S. y PAREDES, M. Geometria de Variedades bandeira. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Física y Naturales. 2004.

SALMENSON, H. Notes on Lie Algebras. Springer – Verlag New York Inc. 1990.

SAN MARTÍN, L. Álgebras de Líe. Editora da Unicamp. 1999.

RESUMEN ANALÍTICO ESPECIALIZADO (RAE)

TIPO DE DOCUMENTO / OPCIÓN DE GRADO	PROYECTO DE ESTUDIANTE COMO OPCIÓN DE GRADO PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
ACCESO AL DOCUMENTO	UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS
1. TÍTULO DEL DOCUMENTO	EXISTENCIA DE SUBÁLGEBRAS DE CARTAN EN ÁLGEBRAS DE LIE SOLUBLES
2. NOMBRE Y APELLIDOS DE AUTOR	ANDRÉS FELIPE LIZARAZO QUINTERO
3. AÑO DE PUBLICACIÓN	2019
4. UNIDAD PATROCINANTE	UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS, FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS, ESCUELA DE PEDAGOGÍA, PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA.
5. PALABRAS CLAVES	MATRICES, ESPACIO Y SUBESPACIO VECTORIAL, ESPACIO COCIENTE, ÁLGEBRA DE LIE, IDEAL, ISOMORFO, HOMOMORFISMO, ÁLGEBRAS SOLUBLES Y NILPOTENTES, TEOREMA DE ENGEL, SUBÁLGEBRA DE ENGEL, SUBÁLGEBRA DE CARTAN
6. DESCRIPCIÓN	EL PRESENTE TRABAJO SE DESARROLLÓ A FIN DE DESPERTAR EL INTERÉS EN LOS ESTUDIANTES POR APRENDER NUEVAS TEMÁTICAS NOVEDOSAS, POR LO QUE, EL INFORME RECOPILA INFORMACIÓN MATEMÁTICA QUE NO SE ENSEÑAZA EN EL PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA DE LA UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS.
7. CONTENIDOS	ÁLGEBRAS DE LIE SOLUBLES, SUBÁLGEBRAS DE CARTAN

8. METODOLOGÍA	EL PRESENTE TRABAJO SE DERIVA DEL TRABAJO QUE GENERALIZA EL PROFESOR M. NAVARRO A PARTIR DE LA TEORÍA DE ÁLGEBRAS DE LIE SOLUBLES DE DIMENSIÓN FINITA, INSPIRADA EN LA TEORIA DE GRUPOS FINITOS POR EL PROFESOR D. BARNES. LA INVESTIGACIÓN UTILIZADA ES LA PURA, CON METODOLOGÍA TEÓRICA.
9. FUENTES	-ALVARO, W. ÁLGEBRA LINEAL I, CAPITULO 7: ESPACIO COCIENTE. CENTRO DE MATEMÁTICA (CMAT). 2006. -ARCE, C., CASTILLO, W. y GONZÁLEZ, J. ÁLGEBRA LINEAL. UNIVERSIDAD DE COSTA RICA, ESCUELA DE MATEMÁTICAS. TERCERA EDICIÓN 2002. -BARNES, D. ON CARTAN SUBALGEBRAS OF LIE ALGEBRAS. MATH. ZEITSCHR. 101, 350-355. 1967. -BARNES, D. ON THE COHOMOLOGY OF LIE ALGEBRAS. MATH. ZEITSCHR. 101, 343-349. 1967. -CAICEDO, J. TEORÍA DE GRUPOS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, SEDE BOGOTÁ. 2004. -CASTRO, A. CLASIFICACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES DE DIMENSIÓN FINITA Y LOS DIAGRAMAS DE DYNKIN. TESIS DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS. UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER, 2005. -DURÁN, A. SECCIÓN HISTORIA GACETA RSME, UNIVERSIDAD DE SEVILLA. VOL. 5.1. 2002. -FUENTES, L. y LÓPEZ, V. INTRODUCCIÓN A LAS ÁLGEBRAS DE LIE. 2013. -GALINA, E. CONCEPTOS BÁSICOS DE ÁLGEBRAS DE LIE. UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA. -GUTIÉRREZ, I. y NAVARRO, M. CLASES DE ÁLGEBRAS DE LIE Y SUBÁLGEBRAS DE CARTAN, REVISTA COLOMBIANA DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DEL NORTE, COLOMBIA. 2008. -NAVARRO, M. GENERALIZACIÓN DE LAS SUBÁLGEBRAS DE CARTAN PARA ÁLGEBRAS DE LIE SOLUBLES DE DIMENSIÓN FINITA. UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA-SEDE MEDELLÍN. 2006. -OLAYA, A. CARACTERIZACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES Y SOLUBLES. UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS. 2017. -PINZÓN, S. VARIEDADES BANDEIRA, F–ESTRUCTURAS E MÉTRICAS (1-2)-SIMPLÉTICAS. Ph. D TESIS, UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, BRASIL, 2003. -PINZÓN, S. Y PAREDES, M. GEOMETRÍA DE VARIEDADES BANDEIRA. REVISTA DE LA ACADEMÍA COLOMBIANA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICA Y NATURALES. 2004. -SAN MARTÍN, L. ÁLGEBRAS DE LIE. EDITORA DE UNICAMP, 1999.

10. CONCLUSIONES	-AL ESTUDIAR ALGUNAS NOCIONES BÁSICAS SOBRE ÁLGEBRAS DE LIE SOLUBLES, LA ESTRUCTURA Y REPRESENTACIÓN DE LAS SUBÁLGEBRAS DE CARTAN, SE CONCLUYE QUE LA TEORÍA DE GRUPOS ES FUNDAMENTAL PARA ESTE TRABAJO. -EN ESTE TRABAJO DE GRADO SE ESTUDIO Y SE DEMOSTRÓ LA EXISTENCIA DE LAS SUBÁLGEBRAS DE CARTAN EN LAS ÁLGEBRAS DE LIE SOLUBLES, MEDIANTE PROCEDIMIENTOS MATEMÁTICOS QUE PERMITIO ENRIQUECER EL CONOCIMIENTO EN UN NUEVO TEMA. -LA TEORÍA DE ÁLGEBRAS DE LIE SOLUBLES DE DIMENSIÓN FINITA ES INSPIRADO EN EL DESARROLLO DE LA TEORÍA DE GRUPOS FINITOS Y FUE CONSIDERADO INICIALMENTE POR EL PROFESOR D. BARNES DE LA UNIVERSIDAD DE SIDNEY. UNO DE LOS APORTES CENTRALES DE ESTE TRABAJO DE GRADO CONSISTIÓ EN PRESENTAR EN DETALLE LOS RESULTADOS ORIGINALES PUBLICADOS EN EL FABULOSO ARTÍCULO DONDE SE DEMUESTRA LA EXISTENCIA DE LAS SUBÁLGEBRAS DE CARTAN EN LAS ÁLGEBRAS DE LIE SOLUBLES DEL PROFESOR BARNES Y DE LOS RESULTADOS DE TRABAJO DE TESIS QUE GENERALIZO EL PROFESOR M. NAVARRO, A PARTIR DEL TRABAJO DE BARNES, DEL CUAL HEMOS REFERENCIANDO EN ESTE INFORME DE GRADO.
11. FECHA DE ELABORACIÓN	2019